確率及び統計／レポート 2

035743A：比嘉　雅樹

1　問題

Pascal 分布の確率関数は, 次式で定義されている。

$$P(X=k)=\frac{1}{1+\mu}(\frac{\mu}{1+\mu})^k \quad (\mu\ >0, k=0,1,2,\cdots)$$

(1) 確率変数であることを証明せよ。
(2) 期待値を求めよ。
(3) 分散を求めよ。

2　解答

2.1　確率変数であることを証明せよ。

もし、これが確率変数なら総和が 1 なるはずであるので、それを確かめる。
問題の式に公比数列の和の公式を用いると

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\mu}(1-(\frac{\mu}{1+\mu})^k)}{1-\frac{\mu}{1+\mu}}$$

となり、整理すると

$$\lim_{k\to\infty}(1-(\frac{1}{\frac{1}{\mu}+1})^k)=1$$

2.2　期待値を求めよ。

求める期待値を $E[X]$ とすると、

$$\begin{aligned} E[X] &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}f(x_k)W_k \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}k\{\frac{1}{1+\mu}(\frac{\mu}{1+\mu})^k\} \end{aligned}$$

ここで、$x = \frac{\mu}{1+\mu}$ と置くと

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} k(1-x)x^k \\
&= \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=0}^{n} kx^k - \sum_{k=0}^{n} kx^{k+1}) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{n+1}}{1-x} + nx^{n+1} - 1 \\
&= \frac{1-0}{1-\frac{\mu}{1+\mu}} + 0 - 1 \\
&= \mu
\end{aligned}
$$

2.3 分散を求めよ。

期待値を求めた時と同様に、$x = \frac{1}{1+\mu}$ と置く。
求める分散を $V[X]$ とすると、$V[X] = E[X^2] - E[X]^2$ なのでまず $E[X^2]$ を求める。

$$
\begin{aligned}
E[X^2] &= \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=0}^{n} k^2x^k - \sum_{k=0}^{n} k^2x^{k+1} \\
&= \frac{2}{(1-x)^2} - \frac{(x+2)(1-x)}{1-x} \\
&= \frac{2-(x-x^2+2-2x)}{(1-x)^2} \\
&= \frac{x^2+x}{1-x^2} \\
&= \frac{\mu^2}{1+\mu} + \mu\ (1+\mu) \\
&= 2\ \mu^2 + \mu
\end{aligned}
$$

よって、求める分散は

$$
\begin{aligned}
V[X] &= [X^2] - [X]^2 \\
&= 2\ \mu^2 + \mu\ -\ \mu^2 \\
&= \mu^2 + \mu
\end{aligned}
$$