確率及び統計/レポート 4

035743A：比嘉雅樹

1　課題

確率変数 X が正規分布 N(1,0.16) に従うとき、次の値を求めよ。

2　解

2.1　$P(X > 0)$

まず、変数を変換して

$$Z = \frac{X-1}{0.4} \tag{1}$$

とする。これにより Z は N(0,1) に従うので標準正規分布として考えられる。
また、この変換にともない、

$$X > 0 \to Z > -2.5$$

となるので、求める確率は

$$P(Z > -2.5) = \int_{-2.5}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

さらに、

$$\phi(z) = \int_{z}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \tag{2}$$

と置き、数表から対応させる。(以下すべての問題で使用)
また、積分定数 z を x に変えてもその値は変わらないので

$$P(Z > -2.5) = \int_{-2.5}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

と表せる。
ここで、確率 $P(-\infty < Z < \infty)$ は 1 となるので

$$\begin{aligned}
\int_{-2.5}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx &= 1 - \int_{-\infty}^{-2.5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= 1 - \int_{2.5}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= 0.99379
\end{aligned}$$

2.2 $P(0.2 < X < 1.8)$

式 (1) より、$P(-2 < Z < -2)$ となる。

$$
\begin{aligned}
P(-2 < Z < 2) &= \int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= 2\left(\int_0^\infty - \int_2^\infty\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= 2\{\phi(0) - \phi(2)\} \\
&= 0.9544
\end{aligned}
$$

2.3 $P(|X-1| \leq 1)$

式 (1) より、$P(Z \leq -2.5, Z \geq 2.5)$ となる。

$$
\begin{aligned}
P(Z \leq -2.5, Z \geq 2.5) &= \int_{-\infty}^{-2.5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_{2.5}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= 0.00621 + 0.00621 = 0.01242
\end{aligned}
$$

2.4 $P(X < c) = 0..99$ となる c の値

式 (1) より $P(Z < \frac{c-1}{0.4})$ となる。

$$
P(Z < \frac{c-1}{0.4}) = \int_{-\infty}^{\frac{c-1}{0.4}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx
$$

ここで、確率 $P(-\infty < Z < \infty)$ は 1 となるので

$$
\begin{aligned}
P(Z < \frac{c-1}{0.4}) &= 1 - \int_{\frac{c-1}{0.4}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.99 \\
\phi(\frac{c-1}{0.4}) &= 0.01 \\
\frac{c-1}{0.4} &\fallingdotseq 2.32 \\
c &\fallingdotseq 1.928
\end{aligned}
$$

2.5 $P(|X-1|) = 0.95$ となる c の値

式 (1) より $P(-\frac{c}{0.4} < Z < \frac{c}{0.4})$ となる。

$$
\begin{aligned}
P(-\frac{c}{0.4} < Z < \frac{c}{0.4}) &= 2\left(\int_0^\infty - \int_{\frac{c}{0.4}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\right) dx \\
&= 2\{\phi(0) - \phi(\frac{c}{0.4})\} = 0.95 \\
\phi(\frac{c}{0.4}) &= 0.025 \\
\frac{c}{0.4} &= 1.96 \\
c &= 0.784
\end{aligned}
$$