# 確率と統計
# レポート５

学籍番号：035747C：外間盛敏

2004年6月24日

## 1 課題

単項分布とは、確率変数がある値 $\mu$ となる確率が 1 である分布で、$\epsilon(x-\mu)$ と表記する。

(1) 自由度 $n$ の $X^2$ 分布において、$n \to \infty$ のとき、$\frac{X^2}{n}$ の分布は単項分布 $\epsilon(x-1)$ に収束することを示せ。

(2) 自由度 $m$,$n$ の $F$ 分布において、$n \to \infty$ のとき、$mF$ の分布は自由度 $m$ の $X^2$ 分布に収束することを示せ。

## 2 解

(1)

$$\Phi(\xi) = E[e^{i\xi X}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} W(x) dx$$

$X^2$ 分布の確率密度は

$$C_n(y) = \frac{1}{2^{N/2}\Gamma(N/2)} y^{(N/2)-1} e^{-y/2}$$

公式にあてはめると

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} C_n(y) dx$$

$C_n(y)$ はこのままでは $x$ で積分できないので $y/2 = x$ と変数を変換する。$X^2$ 分布は $y \geq 0$ なので $x \geq 0$

$$\Phi(\xi) = \int_0^{\infty} e^{2i\xi x} \frac{1}{2^{N/2}\Gamma(N/2)} x^{(N/2)-1} e^{-x} dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(N/2)} \int_0^{\infty} e^{(2i\xi-1)x} x^{(N/2)-1}$$

となる。$(2i\xi - 1)x$ を $-a$ とおく。

$$= \frac{1}{\Gamma(N/2)} \int_0^\infty e^{-a} \left( \frac{a}{1-2i\xi} \right)^{(N/2)-1} \left( \frac{1}{1-2i\xi} \right) da$$

$$= \frac{1}{(1-2i\xi)^{N/2}}$$

となり、

$$E[e^{i\xi X/N}] = E[e^{\frac{i\xi}{N} X}]$$

なので

$$\frac{1}{(1-2i\xi/N)^{N/2}}$$

が $\frac{X^2}{n}$ の特性関数となる。$N \to \infty$ すると、

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\{1 + (-2i\xi/N)^{-N/2i\xi}\}^{-i\xi}}$$

$$= \frac{1}{e^{-i\xi}}$$

$$= e^{i\xi}$$

単項分布の特性関数は

$$E[e^{i\xi X}] = e^{i\xi 1} \cdot 1$$

$$= e^{i\xi}$$

よって $\frac{X^2}{n}$ の分布は単項分布 $\epsilon(x-1)$ に収束する。

(2)

$$\frac{Y/m}{Y/n} = F$$

となり、$Y/n$ は (1) より 1 なので

$$\frac{Y}{m} = F$$

$$mF = Y$$

よって、$X^2$ 分布に収束する。