確率及び統計／レポート６

035743A：比嘉雅樹

1　課題

正規分布に従う母集団から次の大きさ 10 の標本を得た。
1.7 2.4 2.7 1.8 3.0 4.1 1.8 3.2 1.6 2.3

(1) 母数 μ,σ^2 を最尤推定せよ。

(2) 母数 μ,σ^2 を信頼水準 0.95 でそれぞれ区間推定せよ。

(3) 帰無仮説 $H_0 : \mu = 2$ を有意水準 0.05 で両側検定せよ。

(4) 帰無仮説 $H_0 : \sigma^2 = 1$ を有意水準 0.1 で両側検定せよ。

2　解

2.1　(1)

母集団が正規分布に従うので、母数 μ の最尤推定値 $\hat{\mu}$ は

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x^i \\ &= 2.46\end{aligned}$$

$\hat{\sigma^2}$ は

$$\begin{aligned}\hat{\sigma^2} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \left(x^{(i)} - \hat{\mu}\right)^2 \\ &= 0.5804\end{aligned}$$

2.2　(2)

自由度 N-1 の t 分布に従う、絶対値がこれより大きな値を得る確率 $1-0.95 = a$ より

$$t_u = 2.262$$

$\overline{x}$ を用い、不偏標本分散値を求め、

$$s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{l=1}^{N}\left(x^{(i)} - \overline{x}\right)^2$$

から得られる $s \doteqdot 0.803$ を使い、

$$2.46 - 2.262 \times \frac{0.803}{\sqrt{10}} < \mu < 2.46 + 2.262 \times \frac{0.803}{\sqrt{10}}$$

$$1.885 < \mu < 3.035$$

x^2 分布の表から $N-1=9$、$1-\frac{a}{2}$ と $\frac{a}{2}$ の点をさがすと

$$0.975 \text{ の点} \rightarrow 2.70$$

$$0.025 \text{ の点} \rightarrow 19.02$$

$s^2 = 0.645$ を用いて

$$\frac{9 \times 0.645}{19.02} < \sigma^2 < \frac{9 \times 0.645}{2.70}$$

$$0.305 < \sigma^2 < 2.150$$

2.3 (3)

母平均に対する検定統計量は

$$t = \frac{\overline{x} - 0}{\sqrt{\frac{S^2}{N}}}$$

で求められる、これより

$$t = \frac{2.46 - 2}{\sqrt{\frac{0.645}{10}}} = \frac{0.46}{0.254} = 1.811$$

自由度 (N-1) の t 分布の数表より、$a = 0.05$ の境界点は 2.685 となる。よって棄却されない。

2.4 (4)

上記で求めた不偏標本分散値 0.645、$N = 10$ を用いると

$$K = \frac{(10-1) \times 0.645}{(1)^2} = 5.805$$

x^2 分布の表より、

$$kl = 3.33$$

$$ku = 16.92$$

であるから 5.805 は ku と kl の間に入っている。ゆえに棄却されない。