

ヒューマンインターフェース

学籍番号 045713C:大城和也

提出日:平成 18 年 06 月 03 日 (土)

1 課題 1

1.1 課題内容

プログラムを動作させ、

->HARpoly

->HMApoly

で AR と MA の伝達特性を表示させ、手計算による伝達特性と一致することを確かめよ。伝達特性は次式のようにになっている。その場合、演算誤差のため計算とは必ずしも一致するとは限らない。

$$HARpoly(z) = \prod_{k=1}^{ARorder/2} (z - ARa(k))(z - ARb(k)) \quad (1)$$

$$HMApoly(z) = \prod_{k=1}^{MAorder/2} (z - MAa(k))(z - MAb(k)) \quad (2)$$

1.2 回答

1.2.1 HARpoly

AR の伝達特性を求める。上記の式 (1) を計算する手始めとして、まず $ARa(k)$ 及び $ARb(k)$ を求める。それぞれの値はプログラム中で次のように定義されている。

$$\begin{aligned} ARa &= r \times e^{ls\pi} \\ ARb &= r \times e^{-ls\pi} \end{aligned}$$

また、それぞれの変数の値は以下のようになっている。

$$\begin{aligned} r &= [0.95 \ 0.95 \ 0.95 \ 0.95 \ 0.95] \\ s &= [0.1 \ 0.3 \ 0.5 \ 0.7 \ 0.9] \end{aligned}$$

これらから、 $ARa(k)$ と $ARb(k)$ はオイラー法を用いて次のように求められる。

$$\begin{aligned} ARa(1) &= 0.95 \times e^{0.1\pi} = 0.90350369 + 0.293566145\iota \\ ARa(2) &= 0.95 \times e^{0.3\pi} = 0.55839599 + 0.768566145\iota \\ ARa(3) &= 0.95 \times e^{0.5\pi} = 0.95\iota \\ ARa(4) &= 0.95 \times e^{0.7\pi} = -0.55839599 + 0.768566145\iota \\ ARa(5) &= 0.95 \times e^{0.9\pi} = -0.90350369 + 0.293566145\iota \end{aligned}$$

ARb は ARa の複素共役であるので

$$\begin{aligned}ARb(1) &= 0.95 \times e^{-0.1i\pi} = 0.90350369 - 0.293566145i \\ARb(2) &= 0.95 \times e^{-0.3i\pi} = 0.55839599 - 0.768566145i \\ARb(3) &= 0.95 \times e^{-0.5i\pi} = -0.95i \\ARb(4) &= 0.95 \times e^{-0.7i\pi} = -0.55839599 - 0.768566145i \\ARb(5) &= 0.95 \times e^{-0.9i\pi} = -0.90350369 - 0.293566145i\end{aligned}$$

となる。

次に, ARa(k) と ARb(k) より $A(k) = (z - ARa(k))(z - ARb(k))$ を求める .

$$A(1) = (z - (0.90350369 + 0.293566145i))(z - (0.90350369 - 0.293566145i))$$

この時, $X = z - 0.90350369$ と置くと

$$X^2 = z^2 - 1.80700738z + 0.816318918$$

となるので, A(1) は

$$\begin{aligned}A(1) &= (X - 0.293566145i)(X + 0.293566145i) \\&= X^2 + 0.0861810815 \\&= z^2 - 1.80700738z + 0.90249999\end{aligned}$$

となる。

同様に k=2 の時は

$$A(2) = (z - (0.55839599 + 0.768566145i))(z - (0.55839599 - 0.768566145i))$$

このとき, $X = z - 0.55839599$ と置き

$$X^2 = z^2 - 1.11679198z + 0.311806082$$

となる。よって

$$\begin{aligned}A(2) &= X^2 + 0.590693919 \\&= z^2 - 1.11679198z + 0.902500001\end{aligned}$$

となる。

同様に k=3

$$\begin{aligned}A(3) &= (z + 0.95i)(z - 0.95i) \\&= z^2 + 0.9025\end{aligned}$$

k=4 の時の $ABa(4)$ の値は $ABa(4)$ の時と比べると初項の符号が違うだけである。また, $ABb(4)$ と $ABb(2)$ にも同じことが言えるため, $A(4)$ の時の値は $A(2)$ で求めた式の代 2 項の符号を変えればよい。

よって

$$A(4) = z^2 + 1.1167918z + 0.902500001$$

また, k=5 の時は先ほどのようなことが k=1 と言えるので

$$A(5) = z^2 + 1.8700738z + 0.90249999$$

となる。

これら始めに与えられた式に代入する。この時の $ARorder = 10$ とプログラム中で記述されていることをふまえて計算を行うと

$$\begin{aligned} HARpoly(z) &= \prod_{k=1}^{ARorder/2} (z - ARa(k))(z - ARb(k)) \\ &= A(1) \times A(2) \times A(3) \times A(4) \times A(5) \\ &= 0.598736927 - 0.000000031z^2 \\ &\quad - 0.000000007z^4 - 0.000000158z^6 \\ &\quad - 0.000000217z^8 + z^{10} \end{aligned}$$

のようになる。

scilab にて $HARpoly$ を表示したときの値は以下のようなになる。

```
-----
-->HARpoly
HARpoly =

      2      3      4
0.5987369 + 2.898E-16z + 2.522E-16z - 6.586E-16z - 1.612E-15z
      5      6      7      8
- 2.359E-15z - 5.845E-16z + 6.365E-16z + 1.110E-15z
      9 10
+ 2.220E-16z + z
-----
```

導出した式と比べてみると初項はほとんどあっている。また, z の次数が奇数である項は小さすぎるので無視できる。また, 次数が偶数の値もその値が非常に小さいという点では同じであり, このくらいの誤差は妥当だと思われる。

1.2.2 HMApoly

次に $HMApoly$ を同様に求める。

$$\begin{aligned} r &= [0.9 \ 0.9] \\ s &= [0.2 \ 0.8] \end{aligned}$$

これらの値から MAa(k) 及び MAb(k) は次のように求められる .

$$\begin{aligned} MAa(1) &= 0.728115295 + 0.529006727i \\ MAb(1) &= 0.728115295 - 0.529006727i \\ MAa(2) &= -0.728115295 + 0.529006727i \\ MAb(2) &= -0.728115295 - 0.529006727i \end{aligned}$$

このとき , $B(k)=(z-MAa(k))(z-MAb(k))$ と置くと , $k=1$ の時 ,

$$B(1) = (z - (0.728115295 + 0.529006727i))(z - (0.728115295 - 0.529006727i))$$

$X = z - 0.728115295$ と置くと ,

$$X^2 = z^2 - 1.4562309z + 0.530151883$$

となる . これより $N(1)$ は ,

$$\begin{aligned} B(1) &= (X - 0.529006727i)(X + 0.529006727i) \\ &= X^2 + 0.279848117 \\ &= z^2 - 1.4562309z + 0.81 \end{aligned}$$

となる . $B(2)$ は符号の関係を考慮して以下のようになる .

$$B(2) = z^2 + 1.4562309z + 0.81$$

これらと $MAorder = 4$ の値より , $HMApoly$ は

$$\begin{aligned} HMApoly &= \prod_{k=1}^{MAorder/2} (z - MAa(k))(z - MAb(k)) \\ &= B(1) \times B(2) \\ &= (z^2 - 1.4562309z + 0.81)(z^2 + 1.4562309z + 0.81) \\ &= z^4 + 1.62z^2 + 0.6561 - 2.12060843z^2 \\ &= 0.6561 - 0.50060843z^2 + z^4 \end{aligned}$$

と求められる .

以下は scilab にて $HMApoly$ を出力したものである . 比べれば分かるようにほとんど , 同じ値となっており , この計算が妥当なことがわかる .

```
-----
-->HMApoly
HMApoly =
          2          3          4
0.6561 - 8.204E-17z - 0.5006075z - 2.220E-16z + z
-----
```

2 課題2

2.1 課題内容

->roots(HARpoly)

で出力される HARpoly=0 の根が

->ARa

->ARb

と一致することを確認せよ。ただし、演算誤差ならびに推定誤差は必ず生じる。同様に、MA についても確認せよ。

2.2 出力結果

```
-->roots(HARpoly) | -->roots(HMAPoly)
ans = | ans =
|
! 0.5583960 + 0.7685661i ! | ! 0.7281153 + 0.5290067i !
! 0.5583960 - 0.7685661i ! | ! 0.7281153 - 0.5290067i !
! - 0.5583960 + 0.7685661i ! | ! - 0.7281153 + 0.5290067i !
! - 0.5583960 - 0.7685661i ! | ! - 0.7281153 - 0.5290067i !
! 2.344E-16 + 0.95i ! |
! 2.344E-16 - 0.95i ! |
! 0.9035037 + 0.2935661i ! | -->MAa(:)
! 0.9035037 - 0.2935661i ! | ans =
! - 0.9035037 + 0.2935661i ! | ! 0.7281153 + 0.5290067i !
! - 0.9035037 - 0.2935661i ! | ! - 0.7281153 + 0.5290067i !
|
-->ARa(:) | -->MAb(:)
ans = | ans =
|
! 0.9035037 + 0.2935661i ! | ! 0.7281153 - 0.5290067i !
! 0.5583960 + 0.7685661i ! | ! - 0.7281153 - 0.5290067i !
! 5.817E-17 + 0.95i ! |
! - 0.5583960 + 0.7685661i ! |
! - 0.9035037 + 0.2935661i ! |
|
-->ARb(:) |
ans = |
|
! 0.9035037 - 0.2935661i ! |
! 0.5583960 - 0.7685661i ! |
! 5.817E-17 - 0.95i ! |
! - 0.5583960 - 0.7685661i ! |
! - 0.9035037 - 0.2935661i ! |
```

出力結果、左側が AR、右側が MA について調べたものである。HARpoly=0 の根となる部分が間の値以外は ARa と ARb での出力と同じである。間の値は E-16 とあるように非常に小さい値なので誤差と見れる。また、MA についても MAa と MAb と一致していることが分かる。これは伝達特性の式を見てもわかるものである。

3 課題3

3.1 課題内容

AR, MA の r と s の値を変え, 極零配置と伝達特性が自分の想像通りに変化することを確認せよ。注意: AR 次数, MA 次数とも必ず偶数にせよ。最低5種類の ARMA 伝達特性を出力し, それを示せ。

3.2 実行結果

AR 及び MA の r と s はそれぞれ, 極零配置における極座標を示している。プログラムにもあるように r が長さで s が角度となっている。この時の s の角度というのは 1.0 で π を表している。伝達特性と極零配置の関係は AR モデルにおいては座標のある場所が極となっており, その大きさは座標の距離によって変化する。MA モデルでは座標がある位置が零になる。ARMA は二つの特性を足し合わせたものであると思われる。

以下に scilab にて出力した極零座標及び伝達特性の図 1~5 をのせる。

3.2.1 グラフ 1

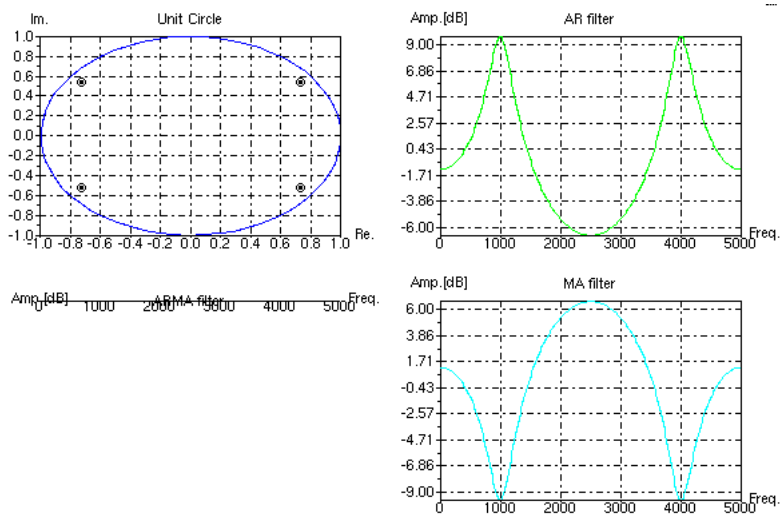


図 1: 極零配置と伝達特性

$$AR \text{ モデル} : r = [0.9 \ 0.9] \quad s = [0.2 \ 0.8]$$

$$MA \text{ モデル} : r = [0.9 \ 0.9] \quad s = [0.2 \ 0.8]$$

このときのパラメータの値は AR モデル, MA モデルともに同じ値にした. AR と MA の伝達特性のグラフは対称となっており, AR で極となっているところが MA では零となっているのが伺える. また, それによって ARMA の伝達特性は互いに打ち消し合うためか表示されていない.

3.2.2 グラフ 2

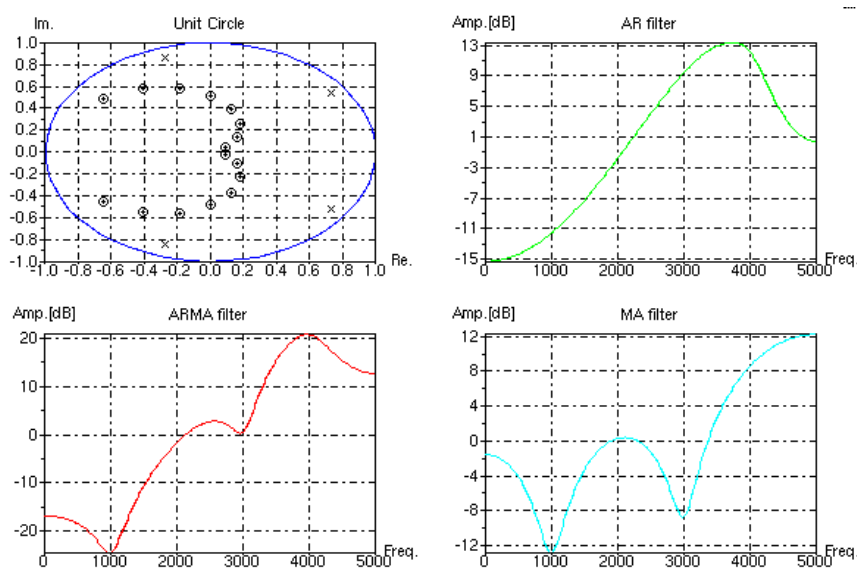


図 2: 極零配置と伝達特性

$$AR \text{ モデル} : r = [0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.8]$$

$$s = [0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.8]$$

$$MA \text{ モデル} : r = [0.9 \ 0.9] \quad s = [0.2 \ 0.6]$$

ここでは AR の極の数を増やしてみた. その際に角度の増える幅は一定に長さはだんだんと延ばす形にした. それによってだんだんと値が大きくなるので滑らかなグラフになっている. MA は 2 つの零を設定. グラフでも 2 つ落ち込んでいるのがわかる.

3.2.3 グラフ 3

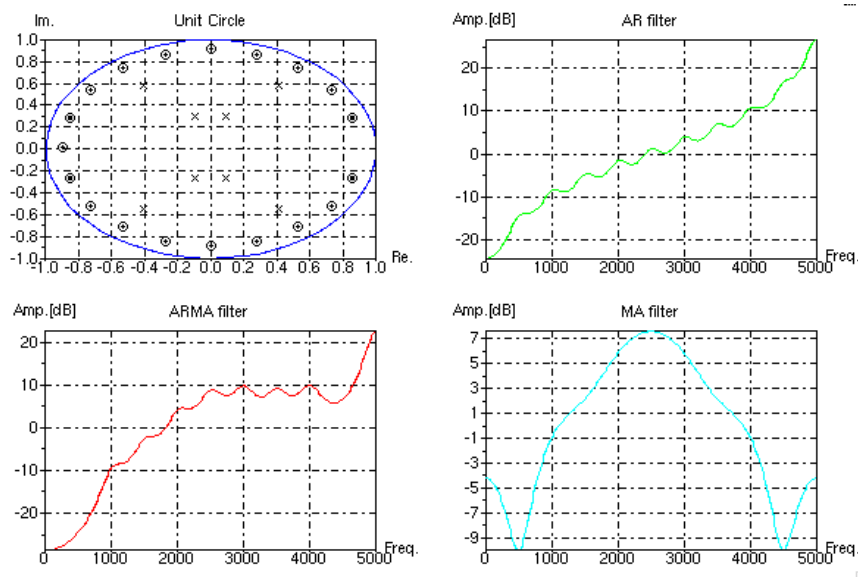


図 3: 極零配置と伝達特性

$$AR \text{ モデル} : r = [0.9 \ 0.9 \ 0.9 \ 0.9 \ 0.9 \ 0.9 \ 0.9 \ 0.9 \ 0.9 \ 0.9]$$

$$s = [0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.8 \ 0.9 \ 1.0]$$

$$MA \text{ モデル} : r = [0.9 \ 0.7 \ 0.3 \ 0.3 \ 0.7 \ 0.9]$$

$$s = [0.1 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.9]$$

AR では先ほどの図 2 のときの r を一定にしてみた．極はできるものの次の角度までの幅が小さいためにその極自体は小さいものがたくさん連なるものとなっている．MA モデルは角度を一定ではない形で増やし， r の値は中心が小さくなるものを設定した．そのため中心で値が上がる際に上がり方に差が出ている．

3.2.4 グラフ 4

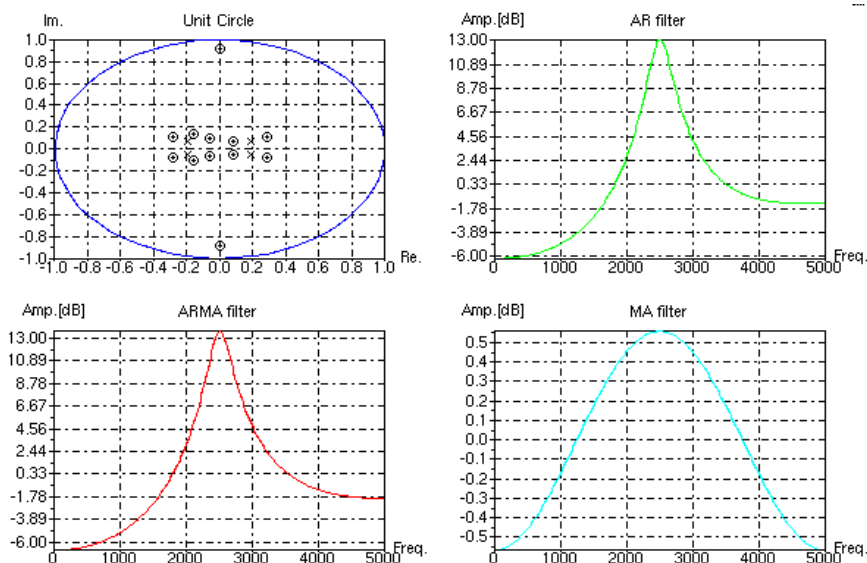


図 4: 極零配置と伝達特性

$$AR \text{ モデル} : r = [0.3 \ 0.1 \ 0.9 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.3]$$

$$s = [0.1 \ 0.2 \ 0.5 \ 0.7 \ 0.8 \ 0.9]$$

$$MA \text{ モデル} : r = [0.2 \ 0.2] \quad s = [0.1 \ 0.9]$$

AR モデルの値は角度は 0.5 の間だけ離している。また、0.5 に対応してない r の値は小さくし、0.5 のところだけ大きくした。そのため、グラフではその 1 点だけが極となり、他は滑らかとなっている。MA モデルでは 2 点おいた。ARMA のグラフはほとんど AR モデルと一緒にある。これは MA モデルの r の値が小さいため影響力が少なかったと思われる。

3.2.5 グラフ 5

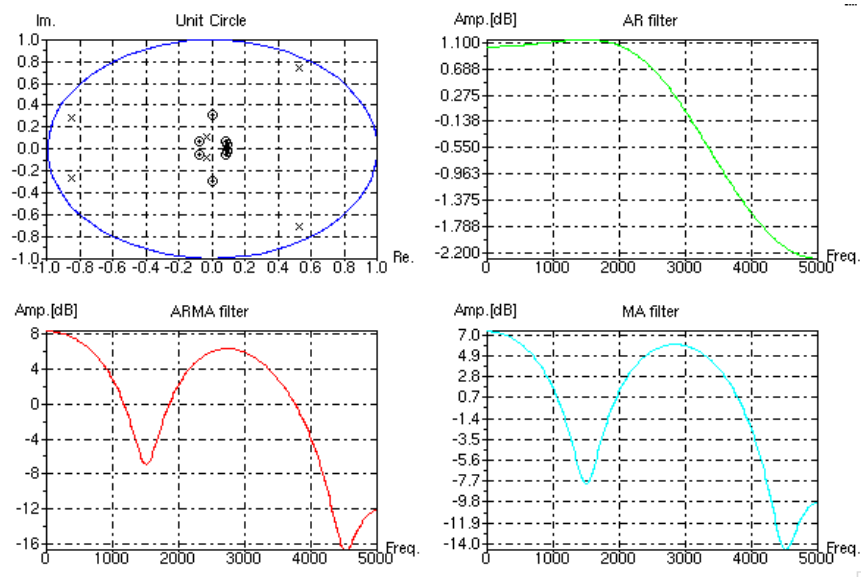


図 5: 極零配置と伝達特性

$$AR \text{ モデル} : r = [0.1 \ 0.1 \ 0.3 \ 0.1]$$

$$s = [0.1 \ 0.2 \ 0.5 \ 0.8]$$

$$MA \text{ モデル} : r = [0.1 \ 0.9 \ 0.1 \ 0.9]$$

$$s = [0.1 \ 0.3 \ 0.6 \ 0.9]$$

AR モデルは r の値が小さいものを準備 . MA モデルは起伏が激しいものとした . 先ほどのグラフとは逆に MA モデルの方が値が大きいため ARMA モデルのグラフは MA と同じようなグラフの形となっている .