確率及び統計レポート 2

学籍番号 045713C：大城 和也

平成 17 年 5 月 19 日

1 課題内容

超幾何分布の確率関数は、次式で定義されている。

$$P(X=k)=\frac{{}_{N_1}C_{k\,N_2}C_{n-k}}{{}_{N}C_n}(N_1,N_2>0,N=N_1+N_2,k=0,1,2,...,n)$$

例えば、形状で区別できない赤玉 N_1 個と白玉 N_2 個が入っている箱の中から、無作為に n 個抜き取ったとき、その中に赤玉が k 個含まれている確率が超幾何分布に該当する。

[1] 確率変数であることを証明せよ。

[2] 期待値を求めよ。

[3] 分布を求めよ。

2 解答

2.1 [1] の解答

X が確率変数であるための条件は、

$P(X=k)1$ かつ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}P(X=k)=1$

である。

ここで N_1,N_2,N,k は条件文より全てプラスとなり、${}_{N_1}C_k,{}_{N_2}C_{n-k}\ \geq\ 0$, より、

$$0\leq\frac{{}_{N_1}C_{k\,N_2}C_{n-k}}{{}_{N}C_n}\tag{1}$$

次に $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}P(X=k)=\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_{N_1}C_kN_2C_{n-k}}{{}_{N}C_n}=1$ を証明する。

まず、${}_NC_n$ について考えてみる。

$$\begin{aligned}
{}_NC_n &= {}_{N_1} +_{N_2} C_n \\
&= {}_{N_1}C_n N_2 C_0 +_{N_1} C_{n-1 N_2} C_1 \\
&\quad +_{N_1} C_{n-2 N_2} C_2 + \ldots +_{N_1} C_{k N_2} C_{n-k} + \ldots +_{N_1} C_0 N_2 C_n \\
&= \sum_{k=0}^{n} {}_{N_1}C_k N_2 C_{n-k}
\end{aligned}$$

これより、

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} P(X=k) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{{}_{N_1}C_k N_2 C_{n-k}}{{}_NC_n} \qquad (2) \\
&= \frac{1}{{}_NC_n} \sum_{k=0}^{n} {}_{N_1}C_k N_2 Cn-k \\
&= \frac{{}_NC_n}{{}_NC_n} \\
&= 1
\end{aligned}$$

(1),(2) より、P(X=k) における X は確率変数であることが証明された。

2.2 [2] の解答

期待値を E[x] とする。

$$\begin{aligned}
E[x] &= \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k \frac{{}_{N_1}C_{k N_2} C_{n-k}}{{}_NC_k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k - \frac{(N_1)!}{(N_1-k)!k!} \frac{n(N-n)!n!}{N!} {}_{N_2}C_{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{N_1(N_1-1)!}{(N_1-k)!(k-1)!} \frac{n(N-n)!(n-1)!}{N(N-1)!} {}_{N_2}C_{n-k} \\
&= \frac{{}_nN_1}{N} \sum_{k=0}^{n} \frac{{}_{N_1}-1C_{k-1 N_2} Cn-k}{{}_{N_1}C_{n-1}} \\
&= \frac{{}_nN_1}{N} \sum_{k=0}^{n} \frac{{}_{N_1}-1C_{y(N-1)-(N_1-1)} C_{n-1-y}}{{}_{N-1}C_{n-1}} \\
&= \frac{{}_nN_1}{N}
\end{aligned}$$

2.3 [3] の解答

分散を V[X] とする。$V[X] = E[X^2] - E[X]^2$ となる。

$$\begin{aligned}
E[X^2] &= \sum_{k=0}^{n} x^2 \frac{{}_{N_1}C_k {}_{N-N_1}C_{n-k}}{{}_N C_n} \\
&= \frac{{}_n N_1}{N} \sum_{k=0}^{n} k \frac{{}_{N_1-1}C_{k-1} {}_{N_2}C_{n-k}}{{}_{N-1}C_{n-1}} \\
&= \frac{{}_n N_1}{N} \sum_{k=0}^{n} \frac{{}_{N_2}C_{n-k}}{{}_{N-1}C_{n-1}} \{({}_{N_1}C_x) - ({}_{N_1-1}C_k)\} \\
&= \frac{{}_n N_1}{N} \frac{N_2 - n + {}_n N_1}{N-1}
\end{aligned}$$

これより、$V[x] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{N_1}{N} \frac{N-N_1}{N} \frac{N-n}{N-1}$ となる。