

確率及び統計レポート3

学籍番号 045713C : 大城 和也

平成 17 年 5 月 26 日

1 課題内容

ある公正なサイコロを使って、サイコロ投げの試行を行うとき、以下に答えよ。

[1] 36 回試行したとき、1 の目が出た回数が区間 $(6-k, 6+k)$ 内にある確率を 0.8 以上にする k の値を求めよ。

[2] [1] の問題をチェビシェフの不等式を用いて答えよ。

2 解答

2.1 [1] の解答

サイコロを振ってでた回数の確率は二項分布で下のように表される。

$$P(X = x) = {}_n C_x p^x (1-p)^{n-x} \quad (x = 0, 1, \dots, n)$$

まず、1 の出た回数は正になるはずであるから、 $6 - k \geq 0$ より $k \leq 6$ と変形する。ここで出てくる 6 という数は、36 回試行したときに 1 の目がでる期待値である。また、 k は負にならないことは明らかである。

次に間を取って $k=3$ を計算してみる。区間は $(3, 9)$ 。

$$\begin{aligned} \sum_{x=3}^9 {}_{36} C_x \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{36-x} &= {}_{36} C_3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{33} + \dots + {}_{36} C_9 \left(\frac{1}{6}\right)^9 \left(\frac{5}{6}\right)^{27} \\ &= 0.74 \end{aligned}$$

次に、もう少しで 0.8 以上になるので $k = 4$ を計算してみる。

$$\sum_{x=2}^{10} {}_{36} C_x \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{36-x} = 0.89$$

となったので、答えは $k \geq 4$ である。

2.2 [2] の解答

二項分布の期待値 $E[X]$ は

$$E[X] = np = 36 * \frac{1}{6} = 6 \quad (1)$$

となる。次に分散は

$$E[X - E[X]^2] = E[X^2] - E[X]^2 = np(1 - p) = 5 \quad (2)$$

となる。

チェビシェフの不等式は下のようになる

$$P(|X - \mu| < e) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{e^2}$$

先ほど求めた期待値と分散をチェビシェフの不等式に代入する。右辺が 0.8 になればいいので

$$\begin{aligned} 0.8 &= 1 - \frac{5}{k^2} \\ \frac{5}{k^2} &= 1 - 0.8 \\ k^2 &= \frac{5}{0.2} \\ &= 25 \\ k &= 5 \end{aligned}$$

これより、 $P(|X - 6| < k) \geq 0.8$ となるためには k が 5 以上の時であることがわかる。