確率及び統計レポート 4

学籍番号 045713C：大城 和也

平成 17 年 6 月 16 日 (木)

1　課題内容

確率変数 X_1, X_2, X_3 は互いに独立な正規分布に従い、期待値と分散は次の通りである。

X_1〜N(1,4)
X_2〜N(2,3)
X_3〜N(3,3)

確率変数 Y は、次式で表される。

$$Y = X_1 + 4X_2 - 2X_3$$

[1] 確率変数 Z が正規分布 $N()$ に従うとき、
確率変数 aZ($a = 0$) の分布を特性関数を用いて求めよ。

[2] 確率変数 Y はどんな分布に従うか。期待値と分散も求めよ。

[3]$(-1.8 \geq Y \geq 12.6)$ を求めよ。

2　解答

2.1　[1] の解答

特性関数をモーメント展開する。

$$\Phi(\xi) = 1 + i\xi\langle aZ\rangle + \frac{1}{2}(i\xi)^2\langle a^2Z^2\rangle + \frac{1}{3!}(i\xi)^3\langle a^3Z^3\rangle$$

次にキュムラント展開を行う。

$$\begin{aligned}\Phi(\xi) &= exp[i\xi\langle aZ\rangle_c + \frac{1}{2}(i\xi)^2\langle a^2Z^2\rangle_c + \frac{1}{3!}(i\xi)^3\langle a^3Z^3\rangle_c] \\ &= 1 + i\xi\langle aZ\rangle_c + \frac{(i\xi)^2}{2}(\langle a^2Z^2\rangle_c + \langle aZ\rangle^2{}_c) + \frac{(i\xi)^3}{3!}(\langle a^3Z^3\rangle_c + 3\langle a^2Z^2\rangle_c\langle aZ\rangle_c + 2\langle aZ\rangle^3{}_c)\end{aligned}$$

この 2 つを比較すれば

$$\begin{aligned}\langle aZ\rangle_c &= \langle aZ\rangle\\ \langle a^2Z^2\rangle_c &= \langle a^2Z^2\rangle - \langle aZ\rangle^2\\ \langle a^3Z^3\rangle_c &= \langle a^3Z^3\rangle - 3\langle a^2Z^2\rangle\langle aZ\rangle + 2\langle aZ\rangle^3\end{aligned}$$

となる。ここで教科書 P44(2.80) より

$$\begin{aligned}E[Z] &= \mu\\ E[Z^2] &= \mu^2+\sigma^2\\ E[Z^3] &= \mu^3+3\mu\sigma^2\end{aligned}$$

さらに、E[cX]=cE[X] となることをふまえてこれらを代入すると

$$\begin{aligned}\langle aZ\rangle_c &= a\langle Z\rangle = a\mu\\ \langle a^2Z^2\rangle_c &= a^2\langle Z^2\rangle - a^2\langle Z\rangle^2 = a^2\sigma^2\\ \langle a^3Z^3\rangle_c &= a^3\langle Z^3\rangle - 3a^3\langle Z^2\rangle\langle Z\rangle + 2a^3\langle Z\rangle^3 = 0\end{aligned}$$

一次キュムラントが $a\mu$、二次キュムラント $a^2\sigma^2$、3 次キュムラントは 0。これらから aZ の分布は正規分布であることがわかる。

2.2 [2] の解答

問題 [1] より X_1、$4X_2$、$-2X_3$ はそれぞれ独立な正規分布に従う。よって再生成により Y も正規分布に従うのが分かる。

期待値と分散はそれぞれの確率変数の期待値の和、分散の和に等しいので

$$\begin{aligned}\mu &= E[Y] = E[X_1]+4E[X_2]-2E[X_3] = 3\\ \sigma^2 &= E[Y^2]-E[Y]^2 = 64\end{aligned}$$

となる。

2.3 [3] の解答

[2] の解から Y が N(3,64) に従う。

これを標準正規分布の形、N(0,1) と起きたいため $A = \frac{Y-3}{8}$ と変数変換する。これにともない

$$-1.8 < Y < 12.6 \rightarrow -0.6 < A < 1.2$$

となり、さらに教科書の P209 の表より

$$P(-0.6 < A < 1.2) = 1 - 0.2743 - 0.1151 = 0.6106$$

となる。