確率及び統計 Report5

学籍番号 045713C : 大城 和也

提出日：平成 17 年 7 月 14 日

1 課題

自由度 n の t 分布を次式で与える。

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$$

(1) $n > 2$ のとき、t 分布の分布を求めよ。

(2) $n \to \infty$ のとき、正規分布に従うことを示せ。

2 $n > 2$ のとき、t 分布の分布を求めよ。

x^2, t 分布はそれぞれ偶関数なので、$x^2 \cdot f(x)$ も偶関数となるから、

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx = 2\int_0^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} E[X^2] &= 2\int_0^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx \\ &= 2\int_0^{\infty} x^2 \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}dx \\ &= 2A\int_0^{\infty} x^2(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}dx \quad (A = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}) \end{aligned}$$

ここで、$1 + \frac{x^2}{n} = \frac{1}{t}$ として変数変換すると、

x	$0 \to \infty$
t	$1 \to 0$

よって

$$\begin{aligned} x^2 &= n(\frac{1}{t}-1) \\ dx &= \sqrt{n}\cdot\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{t}-1)^{-\frac{1}{2}}(-t^{-2})dt \end{aligned}$$

になるので、

$$\begin{aligned} E[X^2] &= 2A\int_1^0 \{n(\frac{1}{t}-1)\cdot(\frac{1}{t})^{-\frac{n+1}{2}}\sqrt{n}\cdot\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{t}-1)^{-\frac{1}{2}}(-t^{-2})\}dt \\ &= An\sqrt{n}\int_0^1 t^{\frac{n+1}{2}-2}\cdot(\frac{1}{t}-1)^{\frac{1}{2}}dt \\ &= An\sqrt{n}\int_0^1 t^{\frac{n}{2}-2}\cdot(1-t)^{\frac{1}{2}}dt \\ &= An\sqrt{n}\int_0^1 t^{(\frac{n}{2}-1)-1}(1-t)^{\frac{3}{2}-1}dt \qquad (1) \end{aligned}$$

ここで、ベータ関数とその性質の中に、以下のものがある。

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \qquad (2)$$

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = B(b,a) \qquad (3)$$

(2) を用いて、(1) の式は以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} An\sqrt{n}\int_0^1 t^{(\frac{n}{2}-1)-1}(1-t)^{\frac{3}{2}-1}dt &= An\sqrt{n}\int_0^1 B(\frac{n}{2}-1,\frac{3}{2}) \\ &= An\sqrt{n}\cdot\frac{n+1}{n-2}\cdot B(\frac{n}{2},\frac{3}{2}) \\ &= An\sqrt{n}\cdot\frac{n+1}{n-2}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot B(\frac{n}{2},\frac{1}{2}) \\ &= An\sqrt{n}\cdot\frac{1}{n-2}\cdot B(\frac{n}{2},\frac{1}{2}) \qquad (4) \end{aligned}$$

この時、$B(\frac{n}{2}-1,\frac{3}{2})$ より $\frac{n}{2}-1>0$ となるので $n>2$ の条件を付加する。
また、$A=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}$ は、(3) より、

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} &= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n}\Gamma(\frac{n}{2})} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{n}{2})}{\sqrt{n}\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}B(\frac{1}{2},\frac{n}{2})} \qquad (5) \end{aligned}$$

と表すことができる。(5) を (4) に代入すると、以下の式を得ることができる。

$$An\sqrt{n}\cdot\frac{1}{n-2}\cdot B(\frac{n}{2},\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{n}B(\frac{1}{2},\frac{n}{2})}\cdot n\sqrt{n}\cdot\frac{1}{n-2}\cdot B(\frac{n}{2},\frac{1}{2})$$

$$= \frac{n}{n-2}$$

よって、

$$E[X^2] = \frac{n}{n-2} \tag{6}$$

となる。但し、$n = 1, 2$ の場合は分散は発散するため存在しないので、$n > 2$ である。

また、x は奇関数であるので、

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \\ &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

であるから、(6),(7) より、

$$V[X] = \frac{n}{n-2} \qquad (n > 2)$$

3　$n \to \infty$ のとき、正規分布に従うことを示せ。

まずは $f(x)$ の変数部分から極限を求める。

$$\begin{aligned} (1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}} &= (1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n}{2}} \cdot (1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{1}{2}} \\ &= \{(1+\frac{x^2}{n})^{\frac{n}{x^2}}\}^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$\frac{x^2}{n} = h$ とおくと、

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}} &= \lim_{n\to\infty}\{(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n}{x^2}}\}^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= \lim_{h\to 0}\{(1+h)^{\frac{1}{h}}\}^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{1}{2}} \\ &= e^{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

次に、f(x) の定数部の極限を求める。その前に、ガンマ関数は N を自然数とすると次のように展開できる。

$$\Gamma(\frac{N}{2}) = \begin{cases} (\frac{N}{2}-1)(\frac{N}{2}-2)\cdots 2 \cdot 1 & N \text{ は偶数} \\ (\frac{N}{2}-1)(\frac{N}{2}-2)\cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} & N \text{ は奇数} \end{cases}$$

これを階乗を用いて表すと、N が偶数のときは $\Gamma(\frac{N}{2}) = (\frac{N}{2}-1)!$。N が奇数のときは次のようになる。

$$\Gamma(\frac{N}{2}) = (\frac{1}{2})^{N-2} \frac{(N-2)!}{(\frac{N-3}{2})!} \sqrt{\pi}$$

これを f(x) の係数部に代入し、$n \to \infty$ の極限で $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ となることをスターリングの公式を用いて示す。

$$Stirling\text{の公式} \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2n\pi}n^n e^{-n}} = 1$$

ここでは n を偶数とするが、奇数の場合も同じ方法で示すことができる。

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} &= \frac{(\frac{1}{2})^{n-1}\frac{(n-1)!}{(\frac{n-2}{2})!}\sqrt{\pi}}{\sqrt{n\pi}(\frac{n}{2}-1)!} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}(\frac{1}{2})^{n-1}\frac{(n-1)!}{\{(\frac{n}{2}-1)!\}^2} \qquad (8)
\end{aligned}$$

スターリングの公式の n を $n-1$ に置き換えた式と、$\frac{n}{2}-1$ に置き換えた式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!}{\sqrt{2\pi(n-1)}(n-1)^{(n-1)}e^{-n+1}} &= 1 \\
\lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{n}{2}-1)!}{\sqrt{2\pi(\frac{n}{2}-1)}(\frac{n}{2}-1)^{(\frac{n}{2}-1)}e^{-\frac{n}{2}+1}} &= 1
\end{aligned}$$

これを用いると、

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!}{\{(\frac{n}{2}-1)!\}^2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!}{\sqrt{2\pi(n-1)}(n-1)^{n-1}e^{-n+1}} \\
&\quad \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi(\frac{n}{2}-1)(\frac{n}{2}-1)^{n-2}e^{-n+2}}{\{(\frac{n}{2}-1)!\}^2} \\
&\quad \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi(n-1)}(n-1)^{n-1}e^{-n+1}}{2\pi(\frac{n}{2}-1)^{n-1}e^{-n+2}} \\
&= 1 \cdot 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi(n-1)}(n-1)^{n-1}e^{-n+1}}{2\pi(\frac{n}{2}-1)^{n-1}e^{-n+2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi(n-1)}(n-1)^{n-1}e^{-n+1}}{2\pi(\frac{n}{2}-1)^{n-1}e^{-n+2}}
\end{aligned}$$

これを式 (8) に代入すると、

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} &= \lim \frac{1}{\sqrt{n}}(\frac{1}{2})^{n-1} \cdot \lim \frac{(n-1)!}{\{(\frac{n}{2}-1)!\}^2} \\
&= \lim \frac{1}{\sqrt{n}}(\frac{1}{2})^{n-1} \cdot \lim \frac{\sqrt{2\pi(n-1)}(n-1)^{n-1}e^{-n+1}}{2\pi(\frac{n}{2}-1)^{n-1}e^{-n+2}} \\
&= \lim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n-1}{n}} \cdot \frac{(n-1)^{n-1}}{(\frac{n}{2}-1)^{n-1}}(\frac{1}{2})^{n-1} \cdot \frac{1}{e} \\
&= \lim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n-1}{n}} \cdot \frac{(n-1)^{n-1}}{(n-2)^{n-1}} \cdot \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{n-1}{n}} \cdot (1+\frac{1}{n-2})^{n-2} \cdot (1+\frac{1}{n-2}) \cdot \frac{1}{e} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 1 \cdot e \cdot 1 \cdot \frac{1}{e} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}
$$

これを $f(x)$ に代入すれば、

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f(x) &= \lim \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})} \lim(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}
\end{aligned}
$$