$\log x$ の微分, e^x の微分

Ken Bise

平成 17 年 5 月 2 日

1 $y = \log_a x$ の導関数を求める

$$
\begin{aligned}
(\log_a x)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} \quad (* \log a - \log b = \log \frac{a}{b}) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \log_a(1 + \frac{\Delta x}{x})
\end{aligned}
$$

ここで $h = \frac{\Delta x}{x}$ とおくと、$\Delta x \to 0$ のとき $h \to 0$、また $\Delta x = xh$

$$
\begin{aligned}
(\log_a x)' &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{xh} \log_a(1 + h) \\
&= \frac{1}{x} \lim_{h \to 0} \log_a(1 + h)^{\frac{1}{h}} \quad (* b \log a = \log a^b)
\end{aligned}
$$

このとき、$e = \lim_{h \to 0}(1 + h)^{\frac{1}{h}}$ であるから、

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$$

特に、$a = e$ のとき、

$$
\begin{aligned}
(\log_e x)' &= \frac{1}{x} \log_e e \\
&= \frac{1}{x} \quad (* \log_e e = 1)
\end{aligned}
$$

2　$y = a^x$ の導関数を求める

$y = a^x$ の両辺の自然対数を取ると、

$$\log y = x \log a \qquad (* \log_e y = \log y)$$

この両辺を x で微分すると、

$$\frac{y'}{y} = \log a$$

よって $y' = y \log a$、すなわち $(a^x)' = a^x \log a$。
特に、$a = e$ のとき

$$\begin{aligned}(e^x)' &= e^x \log e \\ &= e^x\end{aligned}$$