

演習問題

氏名 : 津波古正輝

学籍番号 : e075739A

1.1

1.2 次の計算時間をオーダという形で表せ。C は正の定数である。

(1) $C+2C+3C+\dots+nC$

$$C(1+2+3+\dots+n)=C\{1/2n(n+1)\}より、$$

答え : $O(n^2)$

(2) $C+2^2C+3^2C+\dots+n^2C$

$$C(1^2+2^2+3^2+\dots+n^2)=C\{1/6n(n+1)(2n+1)\}より、$$

答え : $O(n^3)$

(3) $C+2^3C+3^3C+\dots+n^3C$

$$C(1^3+2^3+3^3+\dots+n^3)= [1/2n(n+1)]^2より、$$

答え : $O(n^4)$

(4) $C\log 2+C\log 3+\dots+C\log N$ (対数の底は2)

$$C(\log 2+\log 3+\dots+\log N)$$

ここで、 $\log N! \leq \log N^N$ より、

答え : $O(N\log N)$

(5) $C+C/2+C/3+\dots+C/N$

$$C(1/1+1/2+1/3+\dots+1/N)$$

ここで $1/1+1/2+1/3+\dots+1/N$ は、ほぼ $\log N$ と等しいので、

答え : $O(\log N)$

1.3 計算時間が $O(n)$ であるが、 $N < N_0$ 、ならば $Cn > C'n^2$ となる実例を与えよ。

例 : 相手に 1 から n までの中で好きな数字を選んでもらい、その数字を当てるというゲーム。

ここで、 $N_0=1$ とすると、 N は 1 以下となる。(例えば $1/2$)

ここで、 $C=2$ 、 $C'=3$ とすると、 $Cn=1$ 、 $C'n^2=3/4$ となり、 $Cn > C'n^2$ となる。

1.4 r を正の定数とし、 a の r 項、 a の $r-1$ 項、 a の $r-2$ 項、 \dots 、 a の 0 項を定数とする時、多項式 $p(n)=a$ の r 項 $\times n^r + a$ の $r-1$ 項 $\times n^{r-1} + \dots + a$ のオーダが n^r であることを示せ。

証明：

n が十分多き値と考えると、

a の r 項 $\times n^r + a$ の $r-1$ 項 $\times n^r + \dots + a n^r = (a$ の r 項 $+ a$ の $r-1$ 項 $+ \dots + a) n^r$
と考える事ができる。ここで、 a の r 項 $+ a$ の $r-1$ 項 $+ \dots + a$ はただの定数であり、
項数が大きいからといって数字が大きいわけではない。つまり、

$$(a \text{ の } r \text{ 項} + a \text{ の } r-1 \text{ 項} + \dots + a) n^r \leq C n^r$$

なる C が十分考えられる。結果、 $p(n) \leq C n^r$ が成り立つので、 $p(n)$ のオーダは n^r であることが言える。

(1) $2^9 < 10^3 < 2^{10}$ より、10 ビットで表す事ができる。

(2) 単位時間が $10^3 C$ 、データサイズが 10 ビットなので、

$$10^3 C \div 10 = 10^2 C$$

答え： $10^2 c$

(3) $2^{19} < 10^6 < 2^{20}$ より、20 ビットで表現できる。

又、単位時間が 10^6 、データサイズが 20 ビットより、

$$10^6 C \div 20 = 1/2 \cdot 10^5 C$$

答え： $1/2 \cdot 10^5 C$

(4) (1)~(3)までの結果から 10 進数 x に対して Cx 単位時間の計算時間を x のデータサイズで割った比を求め、これがデータサイズに関する多項式で表せられるか指数関数となるかを吟味せよ。

10 進数 x に対しての

1000 という十進数に対して、単位時間は $1000C$ 、データサイズが 10

1000000 という十進数に対して、単位時間は $1000000C$ 、データサイズは 20

つまり、データサイズが 2 倍になると、単位時間、数値共に二乗倍となっている。そして、

データサイズが 10 の時は比が $10^2 C$

データサイズが 20 の時は比が $1/2 \cdot 10^5 C$

より、……分らん。