情報数学Ⅰ演習問題解答　　No.1

$$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C| \qquad (3)$$

1. 上の公式（３）を用いて以下の問題を解きなさい。

（１）あるクラスに学生が４０人いる．そのうち，国語が好きな学生は２３　人，数学が好きな学生は１５人，英語が好きな学生は１９人，国語と数学両方好きな学生は７人，数学と英語両方好きな学生は６人，国語と英語両方好きな学生は９人，３科目とも好きな学生は２人とする．国語，数学，英語のうち少なくとも１科目を好きな学生は何人いるか．また，また，いずれも好きでない学生の数は何人か

全体集合$U=40$，国語が好きな人$A=23$，数学が好きな人$B=15$，英語が好きな人 C=19，$A\cup B=7$，$A\cup C=9$，$B\cup C=6$　さらに３科目が好きな生徒は$A\cap B\cap C=2$

従って，少なくとも１科目すきな学生は，上式より

$$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C| = 23+15+19-7-9-6+2=37$$

全体集合が 40 人であるので，すべて嫌いな学生は 40－３７＝３名

（２）ある工場で３０台の自動車が組み立てられた．可能な付属装置として，カーコンポ，空調装置，ラジアルタイヤがある．３０台のうち１５台はカーコンポを備えており，８台は空調装置，６台はラジアルタイヤを備えていることが知られている．さらに，３台は３つのすべての装置を備えている．どの装置も備えていない自動車は**少なくとも**何台か．

A：カーコンポ：１５台，B:空調装置：８台，C ラジアルタイヤ：６台
$A\cap B\cap C=3$

ここで，どの２台を備えている車が３台備えている車より多いことは自明であろう．すなわち，

$$|A\cap B| \geq |A\cap B\cap C|$$
$$|A\cap C| \geq |A\cap B\cap C|$$
$$|B\cap C| \geq |A\cap B\cap C|$$

この計算を行うと，３$^{|A\cap C| \geq |A\cap B\cap| + !A\cap C| + |B\cap C|}$となる．

では，元の式にこの不等式を代入すると，

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|$$
$$+|A\cap B\cap C|\leq |A|+|B|+|C|-3|A\cap B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$
$$=|A|+|B|+|C|-2|A\cap B\cap C|=15+8+6-2x3=23$$

したがって，どれかひとつを装備している台数は$|A\cup B\cup C|\ \leq 23$

ゆえにどどれも装備していない台数は

30－（23 と等しいかそれ以下）≥ 7 台

どの装置も総武子弟ない車は少なくとも 7 台

ここで，数学に言葉の説明をする

少なくとも：少なく無見積もっても，例）天候が不順だったので工事の完成までには，少なくとも 3 日はかかる．

高々：どんなに多く見積もっても，例）本の受講者は高々６０人だ

少なくともは下限を指定していて，高々は上限を指定している．

３．応用問題（難しいよ）

集合 A,B,C,D

に関し和積の公式

$$|A\cup B\cup C\cup D|=|A|+|B|+|C|+|D|-|A\cap B|-|A\cap C|-|A\cap D|-|B\cap C|$$
$$-|B\cap D|-|C\cap D|+|A\cap B\cap C|+|A\cap B\cap D|+|A\cap C\cap D|$$
$$+|B\cap C\cap D|-|A\cap B\cap C\cap D| \qquad (4)$$

が成立することを示しなさい．

上の公式を用いて，1 と 250 の間の整数で，整数 2，3，5，7 のうちどれかで割り切れる数の個数を求めなさい．

[証明]この証明は最初の和積の公式の単なる拡張である．

$|A\cup B|=|X|$, $|C\cup D|=|Y|$

とおこう．もとの式にこの式を代入すると

$|A\cup B\cup C\cup D|=|X|+|Y|-|X\cap Y|=|A|+|B|-|A\cap B|+|C|+|D|-|C\cap D|$

以上で目的の半分は達している．今後は$|X\cap Y|$をどのように処理するかが鍵である．まず，

$|X\cap Y|=|(A)\cup(B)\cap(C\cup D)|$であるから$|(C\cup D)|=Z$とおき，分配率を用いると

$|(A\cup B)\cap Z|=|(A\cap Z)\cup(B\cap Z)|=|A\cap Z|+|B\cap Z|-|A\cap B\cap Z|$

Z をそれぞれ分解すると

$|A\cap Z|=|A\cap(C\cup D)|=|(A\cap C)\cup(A\cap D)|=|A\cap C|+|A\cap D|-|A\cap C\cap D|$

$|B\cap Z|=|B\cap(C\cup D)|=|(B\cap C)\cup(B\cap D)|=|B\cap C|+|B\cap D|-|B\cap C\cap D|$

$|A\cap B\cap(C\cup D)|=|(A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap D|=|A\cap B\cap C|+|A\cap B\cap D|-$
$|A\cap B\cap C\cap D|$

従って，まとめると

$$
\begin{aligned}
|A\cup B\cup C\cup D|&=|X|+|Y|-|X\cap Y|=|A|+|B|-|A\cap B|+|C|+|D|-|C\cap D|\\
&=|A|+|B|-|A\cap B|+|C|+|D|-|C\cap D|-|A\cap C|-|A\cap D|+|A\cap C\cap D|\\
&\quad-|B\cap C|-|B\cap D|-|B\cap C\cap D|+|A\cap B\cap C|-|A\cap B\cap D|+|A\cap B\cap C\cap D|
\end{aligned}
$$

さあ，この公式で応用問題をやろう.

$$
\begin{aligned}
|A\cup B\cup C\cup D|=&|A|+|B|+|C|+|D|-|A\cap B|-|A\cap C|-|A\cap D|-|B\cap C|\\
&-|B\cap D|-|C\cap D|+|A\cap B\cap C|+|A\cap B\cap D|+|A\cap C\cap D|\\
&+|B\cap C\cap D|-|A\cap B\cap C\cap D|
\end{aligned}
$$

1 から 250 の間の数で
A：2 で割れる個数，B: 3 で割れる個数，C: 5 でわれる個数，D: 7 でわれる個数
このとき，2，3，4，5 のどちらかで割り切れる個数は何のあるか.

演習問題解答

数え上げの問題：１から 250 までの間の整数で，２，３，５，７のうちどれかで割り切れる数の個数を求める．

２で割り切れる数の集合：A
３で割り切れる数の集合：B
５で割り切れる数の集合：C
７で割り切れる数の集合：D
このとき

$$|A| = \left\lfloor \frac{250}{2} \right\rfloor = 125, \qquad |B| = \left\lfloor \frac{250}{3} \right\rfloor = 83$$

$$|C| = \left\lfloor \frac{250}{5} \right\rfloor = 50, \qquad |D| = \left\lfloor \frac{259}{7} \right\rfloor = 35$$

$$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{250}{2\times 3} \right\rfloor = 41, \qquad |A \cap C| = \left\lfloor \frac{250}{2\times 5} \right\rfloor = 25$$

$$|A \cap D| = \left\lfloor \frac{250}{2\times 7} \right\rfloor = 17, \qquad |B \cap C| = \left\lfloor \frac{250}{3\times 5} \right\rfloor = 16$$

$$|B \cap D| = \left\lfloor \frac{250}{3\times 7} \right\rfloor = 11, \qquad |C \cap D| = \left\lfloor \frac{250}{5\times 7} \right\rfloor = 7$$

$$|A \cap B \cap C| = \left\lfloor \frac{250}{2\times 3\times 5} \right\rfloor = 8, \quad |A \cap B \cap D| = \left\lfloor \frac{250}{2\times 3\times 7} \right\rfloor = 5$$

$$|A \cap C \cap D| = \left\lfloor \frac{250}{2\times 5\times 7} \right\rfloor = 3, \quad |B \cap C \cap D| = \left\lfloor \frac{250}{3\times 5\times 7} \right\rfloor = 2$$

$$|A \cap B \cap C \cap D| = \left\lfloor \frac{250}{2\times 3\times 5\times 7} \right\rfloor = 1$$

$$\lfloor * \rfloor$$

このとき，次の結果を得る．

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C \cup D| &= 125 + 83 + 50 + 35 - 41 - 25 - 17 - 16 - 11 - 7 \\ &\quad + 8 + 5 + 3 + 2 - 1 = 193 \end{aligned}$$

ここで $\lfloor * \rfloor$ はガウス記号と呼ばれるもので，＊以下の最大の整数を表す．