関数と写像

１．集合と写像によるデータの表現法

データを数学的に記述して考察するためには集合と写像という概念を用いる．データをコンピュータで扱うときも，通常のユーザは意識しないが，集合と写像と用いた記述が基本となっている．集合と写像の概念を明確にするのは後で行うとして，まず身近な例から入ろう．

F={りんご，ぶどう，パイナップル，みかん，バナナ} は集合の例である．この集合は「３つの例でできており，要素は果物の名前（すなわち文字列）である．今，くだものは，それを生産した地域が存在するのは確かである．ところで，地域には，たくさんの特産物があるが，その地域を R＝｛北海道，山梨，愛媛，沖縄｝を考えて，生産地の集合と果物の集合の対応を考えよう．すなわち，どの果物がどこで生産されたかを考える．すると，図１の例の対応関係が生まれる．

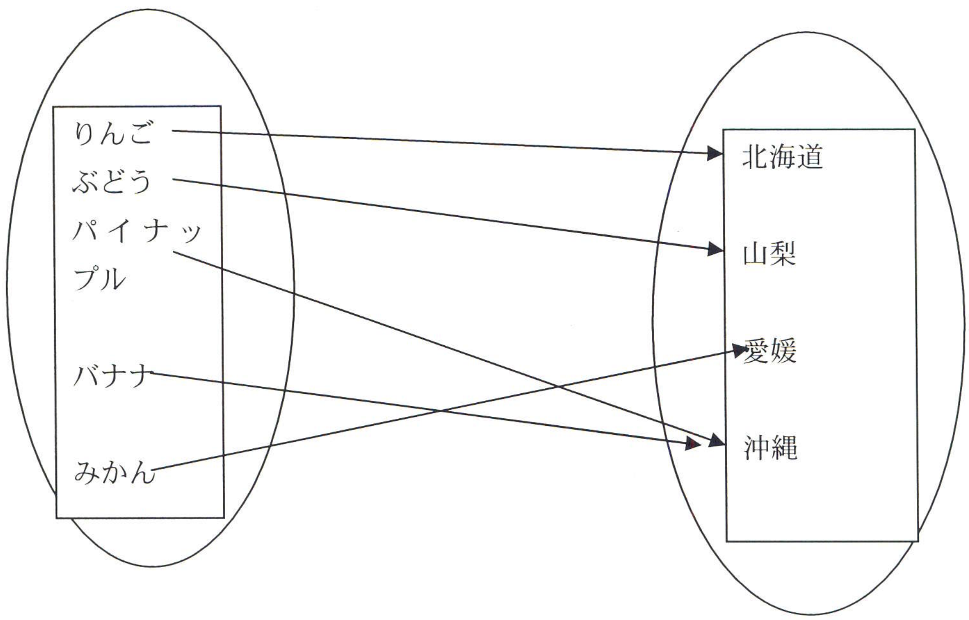


図１．仕入先を示す集合．

ここにあげたくだものは，とうぜんのことながら，色々な生産地に対応している．この対応を関数と呼ぶが，以下ではその具体的な定義を行おう．

関数の定義（P．25）集合 A のどの元にも集合 B の元が唯一つ関係づけられているとき，その対応を A から B への関数（function）または写像(mapping)という．すなわち，

$f: A \to B$　　あるいは　　$A \xrightarrow{f} B$

と表される．言葉を変えれば，任意の集合 A の元 $(a \in A)$ が集合 B の元 $(b \in B)$ に対応づけられているとき，その写像は関数となり

$$b = f(a)$$

と表す．

定義域と値域

集合 A を関数 f の定義域と呼び，

$$D(f)=\{x\in A \mid y=f(x)\text{となる}\ y\in B\ \text{が存在する}\}$$

と表す．値域は，その定義から

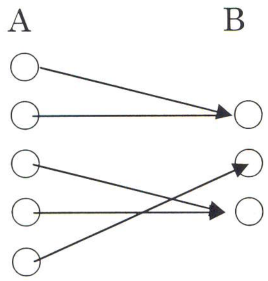
$$f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$$

とも表される．

全射，単射，全単射，恒等写像

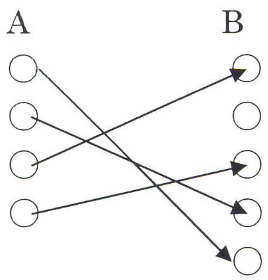
Ⅰ．全射（surjection　上への写像）

任意の $y\in B$に対応している$x\in A$が必ず存在する．（A と B の要素は必ず結ばれる）



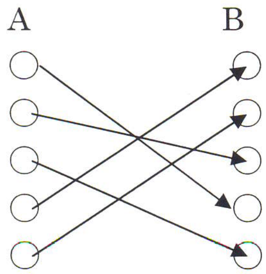
Ⅱ．単射（injection　中への写像）

1つの$y\in B$に対応している$x\in A$は1つしかない．（A の要素は必ず B の要素の一つと対応している．ここで，B の要素数は A のそれより多くてもよい）



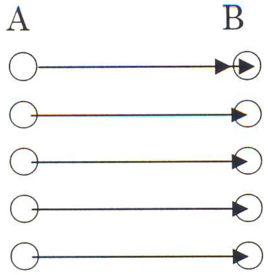
Ⅲ．全単射（bijection）

1つの$y\in B$に対応している$x\in A$は必ず1つだけ存在する．（A の要素と B の要素はすべて一対一対応している．この性質を狭義の一対一対応という）

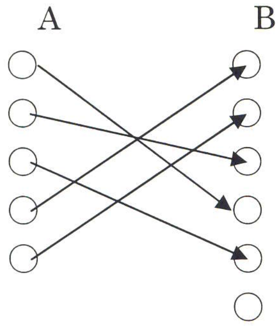


Ⅳ. 恒等写像（identical bijection）

$B=A$のとき，写像 $f:A\xrightarrow{f}A$はXにおける（Aの上の）写像という.（すなわち，Aの要素をそれ自身に移す写像である）



集合A,Bのすべての要素について，一対一対応が成立することを“**狭義の**”と呼んだが，広義の一対一対応の場合は，AもしくはBの少ない方の要素が多い方と一対一に対応することを許す．すなわち，下の例は広義の一対一対応である.



Ⅴ. 逆写像

Aから Bへの狭義の一対一対応は全単射であるが，逆にみたBからAへの写像も，狭義の一対一対応になっているから，やはり全単射である．写像が全単射であるとき，逆の対応を逆写像といい，f^{-1}と書く．つまり，$x\in A,\ y\in B,\ f$をAからBへの全単射であるとして

$$f:A\xrightarrow{f}B,\quad y=f(x)$$

の逆写像f^{-1}は

$$f^{-1}:B\to A,\quad x=f^{-1}(y)$$

となる.

教科書

問 3.1 次の非負整数全体の集合Aから Aへの関数はどのような性質を持つ写像か.

（1） $f(x)=2x+1$,

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	・・・
$f(x)$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	・・・

この表よりAのすべての要素は，Aの要素の奇数に対応し，かつ，対応するのは1つ

しかないから**単射**である．

（２） $g(x)=|x-2|$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	・・・
$f(x)$	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	・・・

この表より，A の要素１，２は移された先では重複する．また，A の要素はすべて A に移される．従って**全射**である．

（３） $h(x)=x+3$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	・・・
$f(x)$	3	4	5	6	7	8	10	11	12	13	14	15	・・・

この表より，A のすべての要素は，0，1，2 をのぞいてすべての A に移され，かつ，対応するのは一つしかない．従って，**単射**である．

補充問題１

$A=\{a,b,c,d\}$， $B=\{a,b\}, C=\{1,2,3,4\}$， $D=\{1,2\}$ として，次の A または B から，C または D への写像は全射，単射，全単射，どちらでもないかを図を用いて説明しなさい．また，全単射のとき，その逆写像を求めなさい．

(1) $\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \\ 1, & 2, & 1, & 2 \end{pmatrix}$ $A\to D$　(2) $\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \\ 4, & 1, & 2, & 3 \end{pmatrix}$ $A\to C$　(3) $\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \\ 3, & 1, & 2, & 4 \end{pmatrix}$ $A\to C$

(4) $\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \\ 1, & 2, & 3, & 4 \end{pmatrix}$ $A\to C$　(5) $\begin{pmatrix} a, & b & & \\ 1, & 2, & 3, & 4 \end{pmatrix}$ $B\to C$　(6) $\begin{pmatrix} a, & b \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ $B\to D$

教科書　例題３．４の説明

整数の集合 Z の要素を７で割った余りを考えよう．すなわち，

$Z=\{\cdots-5,-4,\ -3,-2,-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\cdots\}$ を7で割った余りの集合をZ/R$_7$と表そう．（一般には，$Z/7Z$あるいは簡単に，Z$_7$と表す）．このとき，ZとZ/R$_7$の対応は

$$\begin{array}{rccccccccccccl} Z=\{ & \cdots-5, & -4, & -3, & -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \cdots\} & \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & f:Z/R_7 \\ Z/R_7=\{ & \cdots\ 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \cdots\} & \end{array}$$

となる．（これはもっと長く続けたら理解できます）．

すなわち，整数 Z を７で割った余りは，高々0，1，2，3，4，5，6 であるので，余り

の等しい集合を以下のように書こう.

7で割り切る数の集合 $[\,0\,]=\{\cdots-21,-14,-7,0,7,14,21,\cdots\}$
7で割って１余る数の集合 $[\,1\,]=\{\cdots-20,-13,-6,1,8,15,22,\cdots\}$
7で割って２余る数の集合 $[\,2\,]=\{\cdots-19,-12,-5,2,9,16,23,\cdots\}$
7で割って３余る数の集合 $[\,3\,]=\{\cdots-18,-11,-4,3,10,17,24,\cdots\}$
7 で割って4余る数の集合 $[\,4\,]=\{\cdots-17,-10,-3,4,11,18,25,\cdots\}$
7で割って５余る数の集合 $[\,5\,]=\{\cdots-16,-9,-2,5,12,19,26,\cdots\}$
7で割って６余る数の集合 $[\,6\,]=\{\cdots-15,-8,-1,6,13,20,27,\cdots\}$

一般に整数 a と b を整数 c で割った余りが等しいとき,

$$a \equiv b \mod c$$

と書いて，a と b を同一視することを c を法として合同という（a と b は c を法として合同という）．従って，上の記述においては $8\equiv 15 \mod 7,\ -12\equiv 9 \mod 7,\ 6\equiv 27 \mod 7$ 等が成立する.

本の問題．例題 3.4 と問 3.2

$n=1,2,3,4,5,6$ に対し

$f([n])=[n+1]$:

$f([0])=[1],\ f([1])=[2],\ f([2])=[3],\ f([3])=[4],\ f([4])=[5],\ f([5])=[6],\ f([6])=[0]$

より全単射（左辺と右辺が一対一に対応）.

$f([n])=[2n]$:

$f([0])=[0],\ f([1])=[2],\ f([2])=[4],\ f([3])=[6],\ f([4])=[8]=[1],$

$f([5])=[10]=[3],\ f([6])=[12]=[5]$

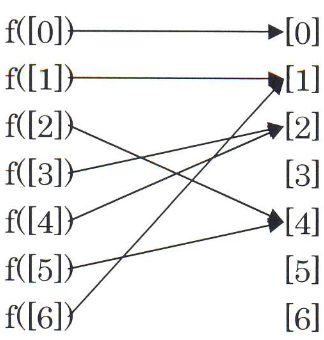
従って，これも全単射である.

$f([n])=[n^2]$:

$f([0])=[0],\ f([1])=[1],\ f([2])=[4],\ f([3])=[9]=[2],\ f([4])=[16]=[2],$

$f([5])=[25]=[4],\ f([6])=[36]=[1]$

これを図で書くと



すなわち，これは，全射や単射の定義に該当しないから，全射でも単射でもない.

3.2 代数系

集合Aとその要素間に演算（写像，加法，乗法）が定義されていて，その演算結果が元の集合Aに属するとき，集合と演算$(A;f)$を代数系という．たとえば，

$A=\{0,1,2,3,4\}$について，加法と乗法を以下で定義すると，これは代数系となる．

加法：$a,b\in A,\ a+b\equiv(a+b)\bmod 5\in A$

乗法：$a,b\in A,\ a\times b\equiv(a\times b)\bmod 5\in A$

加法　$(a+b)\bmod 5$

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

乗法　$(a\times b)\bmod 5$

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

同形写像と準同形写像

二つの代数系$(A;f),(B;g)$について，AからBへの写像φが準同形(homomorphism)であるとは，Aの任意の要素a,bに対して，

$$\varphi(a\cdot b)=\varphi(a)\cdot\varphi(b)$$

が存在することである．さらに，φが全単射（一対一）ならば，AはBと同形(isomorphism)であるといい，

$$(A;f)\cong(B;g)$$

と書く．