

## 情報数学資料 (順序集合)

### 順序集合

順序関係：ある集合  $A$  中の関係  $R$  が以下の性質を満たすとき  $R$  を  $A$  における順序関係という。

- (1) 反射律：任意の  $x \in A$  に対し  $x R x$
- (2) 反対称律：任意の  $x, y \in A$  に対し  $x R y$  かつ  $y R x$  ならば  $x = y$   
注) すなわち,  $x R y$  かつ  $y R x$  となる  $x \neq y$  は存在しない
- (3) 推移律：任意の  $x, y, z \in A$  に対し  $x R y$  かつ  $y R z$  ならば  $x R z$

順序関係の定義された集合を (半) 順序集合といい, すべての要素はその順序関係によって順序付けることが可能なとき, この集合を全順序集合という。

たとえば, 集合  $A = \{2, 4, 8\}$  において,  $A$  の任意の要素  $x, y$  について,  $x$  は  $y$  を割り切る, で関係を与えると, この集合は全順序集合となる。

### 最初の元, 最後の元

最初の元：  $A$  を順序集合とする。要素  $a \in A$  が集合  $A$  の最初の元であるとは, 集合  $A$  のすべての要素と比較可能であり, かつ, 他のどの元よりも前にあることをいう。

最後の元：  $A$  を順序集合とする。要素  $a \in A$  が集合  $A$  の最後の元であるとは, 集合  $A$  のすべての要素と比較可能であり, かつ, 他のどの元よりも後にあることをいう。

### 極小元, 極大元

極小元：  $A$  を順序集合とする。要素  $a \in A$  が集合  $A$  の極小元であるとは, この元の前に集合  $A$  の要素がないことをいう。

極大元：  $A$  を順序集合とする。要素  $a \in A$  が集合  $A$  の極大元であるとは, この元の後に集合  $A$  の要素がないことをいう。

### 下界, 上界, $\inf(B)$ , $\sup(B)$

下界,  $\inf(B)$ ：  $A$  を順序集合とする。集合  $A$  の部分集合  $B$  の下界とは, ( $B$  の要素でありうる)  $A$  の元で,  $B$  と比較可能で, かつ,  $B$  の最初の元と等しいか, その前にある元のすべてをいう。また, その中で最も大きな下界を最大下界といい  $\inf(B)$  と書く。

上界,  $\sup(B)$ ：  $A$  を順序集合とする。集合  $A$  の部分集合  $B$  の上界とは, ( $B$  の要素でありうる)  $A$  の元で,  $B$  と比較可能で, かつ,  $B$  の最後の元と等しいか, その後にある元のすべてをいう。また, その中で最も小さな上界を最小上界といい  $\sup(B)$  と書く。

## 順序集合補充問題

### 問題 1.

集合  $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24\}$  を関係 “ $x$  は  $y$  を割り切る” で (半) 順序を与える. このとき, 以下の問題を解きなさい.

- 1)  $A$  の順序構造を与えるハッセ図を書きなさい.
- 2) 極小元, 極大元を求めなさい
- 3) 最初の元, 最後の元があればそれを求めなさい.

$A$  の部分集合を  $B = \{2, 4, 6, 12\}$  とする.

- 4)  $B$  の下界集合, 上界集合を求めなさい.
- 5) 最大下界  $\inf(B)$ , および, 最小上界  $\sup(B)$  を求めなさい.

### 問題 2.

集合  $S = \{a, b, c\}$  について, この集合全体に対する部分集合全体の集合, すなわち, べき集合  $P(S)$  において, 包含関係  $\subseteq$  は一つの (半) 順序関係になる. このとき, 以下の問題に答えなさい.

- 1) 集合  $S$  のべき集合  $P(S)$  を求めなさい.
- 2) 上で求めた  $P(S)$  を用いて順序構造を表すハッセ図を描きなさい