ベキ集合と集合の表現

1．ベキ集合とは

すべての部分集合を要素とする集合．たとえば，集合 $A = \{a, b, c\}$ の全部分集合は　$\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}$ となりそれをベキ集合で表現すると $\rho^A = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$ となる．さて，ここで，３個の要素の集合のベキ集合のようその個数（部分集合の個数）は上の例から８個となった．では，次の集合 $B = \{a, b, c, d\}$ のベキ集合 ρ^B を求めなさい．

$\rho^B =$

ベキ集合の個数を数えるとき，以下のように数えても良いであろう．ここで，簡単のために，集合 $A = \{a, b, c\}$ について考えよう．

（１） A の要素から何も選ばない（空集合を選ぶ）．

$\quad {}_3C_0$

（２） A の要素から１つ選ぶ．

$\quad {}_3C_1$

（３） A の要素から２つ選ぶ．

$\quad {}_3C_2$

（４） A の要素から３つ選ぶ．

$\quad {}_3C_3$

結局，ベキ集合 ρ^A の個数は

$${}_3C_0 + {}_3C_1 + {}_3C_2 + {}_3C_3 = 1 + 3 + 3 + 1 = (1+1)^3 = 2^3 = 8$$

ここで，集合 $A = \{a, b, c\}$ の要素数を，$|A|$ と書くと $|A| = 3$ である．従って，ベキ集合の個数は $|\rho^A| = 2^{|A|}$ となることがわかる．（このことを ρ^B で確認しなさい）

[多項式の展開計数]（パスカルの三角形）

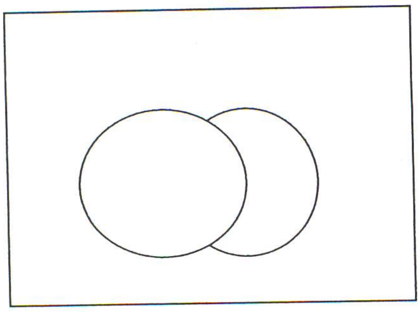
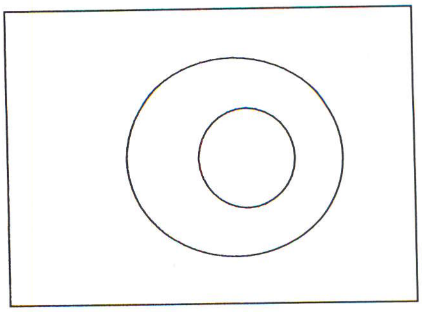
多項式の展開：$(a+b)^n = {}_nC_0 a^n + {}_nC_1 a^{n-1}b + {}_nC_2 a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_{n-1}a^1 b^{n-1} + {}_nC_n b^n$

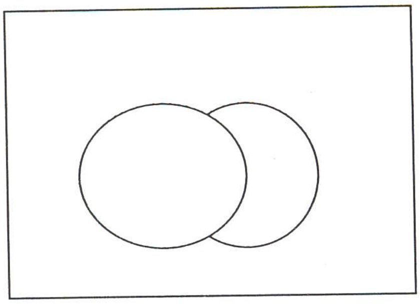
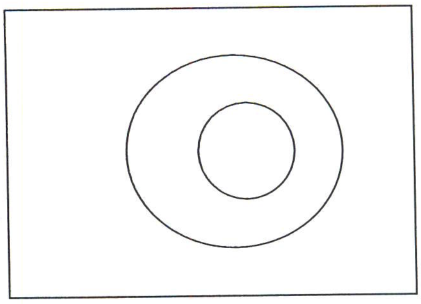
$a = b = 1$ とおくと，次のパスカルの三角形を得る．

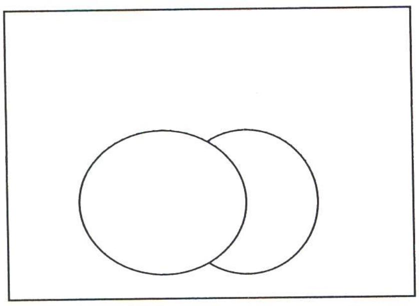
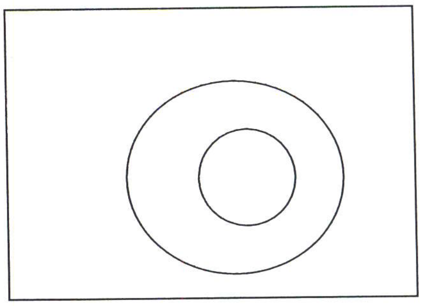
1	$(1+1)^0$
1　1	$(1+1)^1$
1　2　1	$(1+1)^2$
1　3　3　1	$(1+1)^3$
1　4　6　4　1	$(1+1)^4$
1　5　10　10　5　1	$(1+1)^5$
⋮	

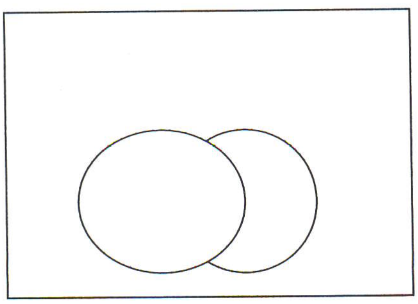
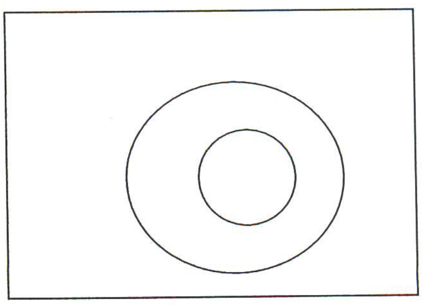
このパスカルの三角形の足し算の法則を見つけなさい．

差集合　：集合 $A-B$ を、和、差、積、補で表わす。

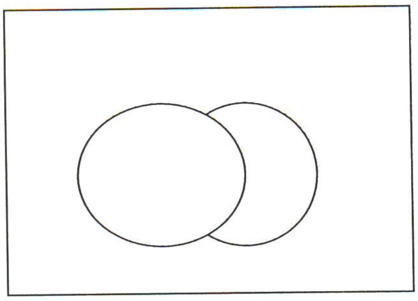
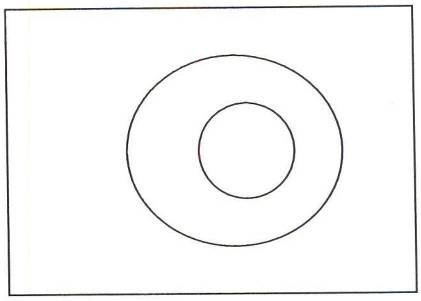



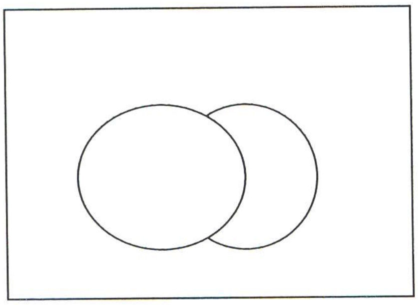
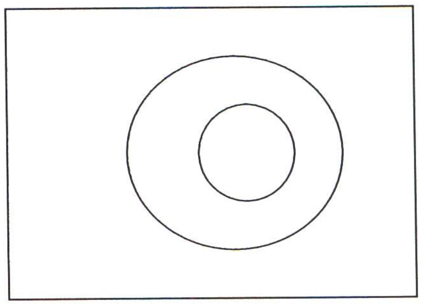
では、上の図を用いて次の問題を解いてみよう。

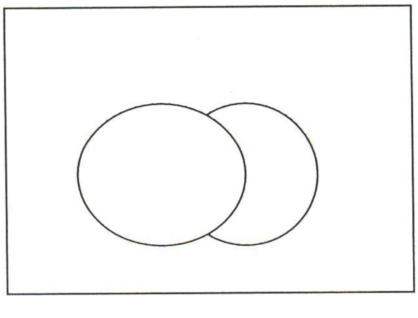
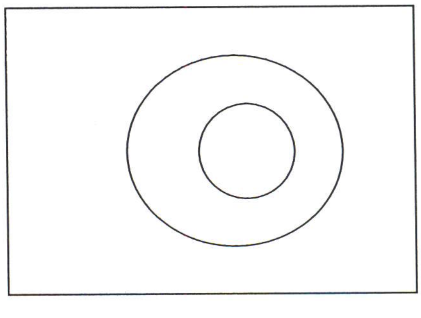
(1)　$A = A \cap B + A \cup \overline{B}$

(2)　$B = A \cap B + \overline{A} \cap B$

(3)　$A \cup B + A \cap B = A + B$

演習問題：全体集合Uを 20 以下の自然数の集合とする。

A＝｛x｜一桁の数｝、　B＝｛x｜xは素数｝

（素数：自然数で１とそれ自身以外に約数を持たないもの）

注１）１は素数でない。

注 2）２は最小の素数で、偶数で唯一の素数である。

（１）　集合A，Bを外延的表現で記述しなさい。

つぎの集合を集合の基本演算で表現しなさい。

（２）　$A-B^c=$

（３）　$\overline{A}\cap B=$

数え上げ

われわれは、集合というものが与えられたとき、その数に注目する。たとえば、みかんがざるの中に入っているとしたら、みかんは何個だろうとか、お菓子の箱を開けたとき、お菓子は何個入っているだろうとか、集合のかずに着目することがしばしばある。また、限られた予算の中でみかんとアイスを買うとき、それぞれ何個ずつかえばよいかという場面にも遭遇する。

ド・モルガンの法則

集合の基本的性質から次のことを示そう。以下では、集合の要素の個数を$|A|$等で記述する。ド・モルガンの定理（包除原理）以下のことが成立する。

$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

例）たとえば、10 人の子どもがいて、りんごを１こ持っている子が６人、みかんを１個持っている子が５人、りんごもみかんも持っている子が３人とすると、りんごもみかんもそれぞれ一個ずつ持っている子は以下のように計算できる

$|A|$：りんごを持っている子どもの数６名

$|B|$：みかんを持っている子どもの数５名

$|C|$：りんご、みかん両方持っている子どもの数３名

$|A\cup B|$：りんごみかんどちらか持っているこどもの和

従って、

$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=6+5-3=8$

全体集合は$|U|$：＝10 名

従って、りんごもみかんも持っていないかわいそうな子は 10－8＝２名。

例題）2，3，5 のいずれでも割れない 30 以下の自然数の数はいくつあるか。

（書き出したらいけませんよ）