数学的帰納法

数学の問題の証明の方法にはいくつかの道があります．それは，その問題の特性によって決定するものですが，離散数学で便利な放蕩として数学的帰納法というのがあります．それは，P(1)という命題が真であることを証明し，P(n)という命題が真であることを仮定したとき，P（n+1）という命題が真となればそれ以降P(n+1)・・・の命題が真であること証明するものです．この概念は非常に大事で，例えばアンドレヴェイユ先生の初学者のための整数論の２ページ基本的性質（６）の中でさりげなく述べています．

（６）すべての空でない正の整数の集合は最小の整数を含む．

略証）実際その様な集合は最小の整数ｎを含む．このとき，整数 0，1，2，n-1,n の中で最初にその中に含まれる数が最小の整数である．

（６）と同等な性質が次の（６‘）の数学的帰納法の原理である．

（6’）正の整数ｘに関する命題がｘ＝０に対して真であり，かつ，“すべてのｘ＜ｎに対して真であるならばｘ＝ｎに対しても真である“ならばすべてのｘについてその命題は真である．

上の２つの議論では，なかなかイメージがつかめないでしょう．そこでイメージをつかみやすいよう例により説明して見ましょう．

自然数の全体集合を N としましょう．そのとき，性質 P と性質 Q があります．ここで，

A={x∈N | P(x)=真}，　B={ x ∈N | Q(x)=眞}

としましょう．今，自然数の要素に関し，P(x)＝真はｘについて常に性質Ｐが成立していることを表します．ここで，P が成立すればＱ が成立するといる論理的な命題はA⊆B とおなじです．次に３段論法を考えて見ましょう．

A＝｛x ∈N｜８を割り切る数｝

B=｛x ∈N｜４を割り切る数｝

C=　{x∈N｜２を割りきる数}

このとき，明らかに$A \subseteq B \subseteq C$すなわち，A→B→C（Aが成立すればＢが成立し，また，Ｃも成立する）．つまり，８で割り切る数は4でも２でも割り切ります．このように，A→B が成立し，B→Cが成立するときは推移率からA→Cが成立します（三段論法ともいいます）．三段論法を積み重ねると多段論法になります．多段論法とは，すなわち，$P_i \to P_{i+1}$が$i=1,2,3,\cdots,n-1$で成立すればさきほどの例から$P_1 \to P_n$となります．ここで，もし，P_1が正しいならば，$P_1 \to P_n$よりP_nも正しいことになります．

帰納的という言葉を辞書などで検索すると具体的な事柄から一般的な事柄を導くという意味があります．一つ一つの積み重ねを行ってやっとゴールにたどり着くという息の長い証明のようですが（６），（６‘）の基本的公理をもう一度読み替えしてみてください．

[数学的帰納法]

P_1が正しい命題であり，命題$[P_{n-1} \to P_n]$がすべての自然数$n \geq 2$で成り立てば，
命題P_nがすべての自然数で成り立つ．

では，帰納法による簡単な証明から入っていきましょう．帰納法による証明の手続きを身に付けてください．

例１）　任意の正の整数ｎについて，

$$S_n : 1+2+3+4+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (1)$$

は真である．

証明　命題$S_1 : \frac{1\cdot 2}{2} = 1$は明らかに真です．よって，**帰納法の第１段（帰納法の基礎ステップ）**はできました．

次に，$S_k : 1+2+3+4+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}$が真であると仮定します．このとき，$S_{k+1}$が真であることを示します．すなわち，$S_{k+1} : 1+2+3+4+\cdots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$を示します．

まず，**帰納法の仮説**により，

$$1+2+3+4+\cdots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

となります．ここで，

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

です．よって，

$$1+2+3+4+\cdots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

であり，このことがS_{k+1}が真であることを検証しています．ゆえに**数学的帰納法の原理**によって$1+2+3+4+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$が成り立ちます．

例２）　ちょっと変わった証明をしてみましょう．みなさんが知っているように，３角形の内角は 180 度，四角形の内角の和は 360 度，５角形の内角の和は 540 度，６角形の内角の和は 720 度である．平面上の凸（ｎ＋２）角形の内角の和は$180 \times n$度であることを示しなさい．まず，三角形の内角の和は明らかに 180 度ですから，その命題をS_1とおくとS_1は明らかに真となり，帰納法の第１段はできました．

（０５１３No.６）

次に，S_{n-1}が正しいとして，すなわち，凸（n＋1）角形の角度が180(n－1)度であることを正しいと仮定した上でS_n＝凸（n＋2）角形の内角の和は180n度である）ことを示そう．まず，凸（n＋2）角形Rに対し，その3つの連続した頂点の作る三角形をRから取り除くと，凸（n+1）角形R'ができます．従って内角の和はR'の内角の和と，取り除いた三角形の内角の和を加えたものになります．ここで，帰納法の仮定から，R'の内角の和はS_{n-1}＝180(n－1)度です．ゆえに，Rの内角の和は｛180(n－1)＋180｝度＝180n度となり，S_nが正しい命題であることが示されました．従って，S_nはすべてのnで正しくなります．

図に描いてみましょう．

いくつかの問題をやってみましょう．

（１） 任意の整数nについて

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

である．

（２） 任意の整数nについて

$$\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6}+\cdots+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{n}{2n+4}$$

である．

数学的帰納法と不等式

次の命題が新であることを証明しましょう．

任意の負でない整数nについて，$2^n>n$である．

証明　まず，帰納法の基礎より，$2^0=1>0$なので不等式は$n=0$について成立します．次に子農法の仮説より$2^k=k$を仮定します．ここで，kは負でない数です．さて，いじょうのことより$2^{k+1}=k+1$を示しましょう．$k=0$のとき，$2^{k+1}=2>1=k+1$であり，よって，$k\geq1$を仮定できます．このとき，

$$2^{k+1}=2\cdot2^k>2k=k+k\geq k+1$$

となり，数学的帰納法の原理により命題は真であることが示されました．

問題：次の二つの命題が真であることを帰納法により証明しなさい．

問１．　３円切手と４円切手だけで６円以上のすべての郵便代が払えることを証明しなさい．

問２．　任意の整数$n\geq5$について，

$$2^n>n^2$$

である．

帰納法のプリント解答

問１．３円切手と４円切手だけで６円以上のすべての郵便料金が支払えることを示しなさい．

帰納法の基礎：６円の郵便代は３円切手２枚で払える．

帰納法の仮定：$k>6$ である k に対して，k 円の切手代が３円切手 m 枚と４円切手 n 枚で支払えることを仮定する．すなわち，

$$k=3m+4n$$

を仮定する $(m\geq 0, n\geq 0)$．この準備の下で，$k+1$ が３ m と４ n で表せることを示す．

帰納の段階：$m\geq 0$ のとき，$k+1=3m+4n+1=3(m-1)+4(n+1)$ であるから，$k+1$ 円の切手代は３円切手 $(m-1)$ 枚と４円切手 $(n+1)$ 枚で支払うことが可能となる．（ここに，$(m-1)\geq 0, (n+1)\geq 0$ である）．$m=0$ ならば，$k=4n$ となり，ここで，$k>6$ であるので，$n\geq 2$ 以上でなければならない．従って，$k+1=4n+1=3\cdot 3+4(n-2)$ となり，$k+1$ 円の切手代は３円切手３枚と４円切手 $(n-2)$ 枚で支払うことができる．

帰納法の結論：ゆえに帰納法の原理より，３円切手と４円切手だけで６円以上のすべての郵便料金が支払えることが示された．

問２．

$n\geq 5$ に対して，$2^n>n^2$ を示す．

帰納法の基礎

まず，$n=5$ のとき，

$2^5=32>25=5^2$ より $n=5$ のとき，上式は成立する．

帰納法の仮定

$n=k>5$ のとき，$2^k>k^2$ を仮定したとき，

$$2^{k+1}>(k+1)^2$$

を示そう．まず，

$$\begin{aligned}2^{k+1}&=2\times 2^k=k^2+k^2=k^2+k\cdot k>k^2+5k\\&=k^2+2k+3k\geq k^2+2k+3\cdot 5\\&>k^2+2k+1=(k+1)^2\end{aligned}$$

ゆえに，上式より，$k>5$ のとき，

$$2^{k+1}>(k+1)^2$$

が成立する．n n

帰納法の結論

ゆえに帰納法の原理により

$n\geq 5$ に対して，$2^n>n^2$ が示された．

５月２０日演習問題

数学的帰納法

（１）

$n \geq 0, a \neq 1$に対して，

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

を帰納法により証明しなさい．

解答：

まず帰納法の基礎より，

$n = 0$のとき，

$$1 = \frac{(1-a)}{(1-a)} = 1$$

となり，成立する．次に帰納法の仮定より

$n = k$に対して，

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^k = \frac{1 - a^{k+1}}{1 - a}$$

を仮定する．

このとき，

$n = k+1$に対して，

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^{k+1} = \frac{1 - a^{k+2}}{1 - a}$$

を示す．

まず，

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^{k+1} = (1 + a + a^2 + \cdots a^k) + a^{k+1}$$
$$= \frac{1-a^{k+1}}{1-a} + a^{k+1} = \frac{1-a^{k+1}+a^{k+1}-a^{k+2}}{1-a} = \frac{1-a^{k+2}}{1-a}$$

となり，$n = k+1$の時も成立することが示された．

ゆえに，すべての$n \geq 0$に対し，本式が成立することが示された．

（２）

$n \geq 1$のすべての整数に対して,$n^3 + 2n$ が３で割りきれることを帰納法によって証明しなさい．

まず，帰納法の基礎より$n=1$のとき，１＋２＝３であるから，成立する．

帰納法の仮定：$n = k$において，$k^3 + 2k$が３で割り切れると仮定したとき，

$$(k+1)^3+2(k+1)$$

も３で割り切れることを示す．

帰納の段階：帰納法の仮定より

$$(k+1)^3+2(k+1)=k^3+3k^2+3k+1+2k+2$$
$$=(k^3+2k)+(3k^2+3k+3)=(k^3+2k)+3(k^2+k+)$$

となり，右辺第１項は仮定より３で割り切れ，また，第２項は明らかに３で割り切れる．

帰納法の結論：以上のことより，

$n \geq 1$ のすべての整数に対して，n^3+2n が 3 で割りきれることが示された．

（３）次の等式を証明しなさい．

1) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$

１）は各自でやってください．

2) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$

２）の略証：$n=1$のとき，

$$\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{2+1}$$

となり成立する．次に$n=k$のとき，

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$$

を仮定する．このとき，

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2k+1)\cdot(2k+3)}$$
$$=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)\cdot(2k+3)}=\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)\cdot(2k+3)}$$
$$=\frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)}{(2(k+1)+1)}$$

となり，すべての$n \geq 1$について

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$$

が示された．