論理と命題

集合（ set ）とは,

客観的に範囲が規定された「“もの”の集まり」

集合を形成する個々の“もの”をその集まりの要素または，元と呼ぶ.

（１） 身長が 170cm 以上の東京の人.

（２） 沖縄の居酒屋にいるオッサン.

（３） 自然数の全体.

客観的判断

集合を規定する条件は命題.

命題：正しいか正しくないかを客観的に判断できる主張.

（１） 身長が 170cm 以上の人はかっこいい.

（２） オッサンは，常に居酒屋にいる.

（３） 自然数どうしのたし算は，自然数である.

命題の（真意）の判断.

論　理：与えられた条件から正しい結論が得られるための考え方の道筋．現象を合理的，統一的に解釈する上に認められる因果関係．正しい判断や認識を得るためにものの考え方を研究する学問.

論理的：前程とそれから導き出される結論との間に道筋が認められて納得がいく様子.

真理値の定義

命題が真であることを１または真（true の T)，偽であることを０または（False の F）と略記して命題の真理値と呼ぶ．そして，それを表で表したものを真理表と呼ぶ.

（真理値 1，0 は２進数に対応している．これにより，様々な論理的操作が２進法の演算として表現でき，コンピュータの基本的原理を支えている）

では，次の命題の真理値を求めよう．

例題１

p_1 ：0 は偶数である．

p_2 ：円周率 π は無限循環小数である．

p_3 ： $\sqrt{5} < e$ である．

p_4 ： 0.99999⋯（無限循環小数）＝１

p_5 ：最小の正の素数は２である．

解答

p_1 ：0 は偶数であるから真理値は１．

p_2 ：円周率 π は超越数 π ＝3.1415⋯であるから真理値は 0.

p_3 ： $\sqrt{5} = 2.2369\cdots < 2.718\cdots = e$ であるから真理値は１．

p_4 ： 0.99999⋯（無限循環小数）＝ $0.999 = 0.9 + 0.09 + 0.009 + \cdots = \left(\dfrac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}}\right) = 1$

　より，真理値は１．

p_5 ：真理値は１（１は素数でない）．

否定

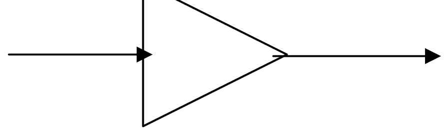
命題 p に対して，「p でない」という命題を p の否定といい， $\overline{p}$ と書く．

上の例題の否定を述べなさい．

否定命題の真理値表

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

否定の回路（NOT 回路）



論理和

二つの命題 p, q に対して，「p であるか，または，q である」という命題を

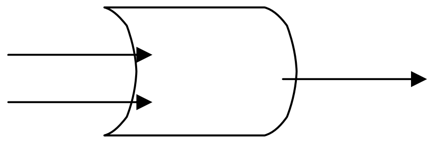
p と q の論理和（logical sum）

といい， $p \vee q$ と書いて，「p あるいは q 」あるいは「p or q 」と呼ぶ．

論理和の真理値表

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

論理和の回路（or 回路）



例題 2

以下の命題 p, q について，それぞれの論理和 $p \vee q$ はどういう命題になるかを答えなさい.

（1） p ：明日は遠足である.

q ：明日は運動会である.

（2） p ：2<3

q ：2＝3

（3） p ：2006 年ワールドカップでドイツが優勝する.

q ：2006 年ワールドカップでフランスが優勝する.

論理積

二つの命題 p, q に対して，「p であり，かつ，q である」という命題を

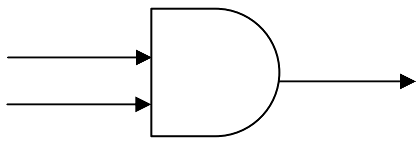
p と q の論理積（logical product）

といい， $p \wedge q$ と書いて，「p かつ q 」あるいは「p and q 」と呼ぶ.

論理積の真理値表

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

論理積の回路（and 回路）



例題 3

以下の命題 p, q について，それぞれの論理積 $p \wedge q$ はどういう命題になるかを答えなさい.

（1） p ：おやつは 300 円以内である.

q ：おこずかいは千円以内である.

（2） p ：2< 3

q ：2＝ 3

（3） p ：2006 年ワールドカップでドイツが優勝する.

q ：2006 年ワールドカップでフランスが準優勝する.

複合命題

複合命題とは，二つの命題を併記したもので，その命題同士の関係が‘または（含意)’，‘かつ（同値条件)’で結ばれる．上記二つの命題について考えよう．

Ⅰ．p *implies* q（ｐはｑを含意する）

まず, 複合命題を構成するための他の２つの重要な方法を述べる．２つの命題“温度は７０℃を超える”と“警報が鳴る”を考え，それぞれpとqで表わす．また，命題“温度が 70℃を超えると警報が鳴る”をrで表わす．このとき，次のことがわかる．温度が 70℃を超えるとき警報が鳴る（pとqがともに真）ならばrは真であり，温度が 70℃を超えても警報が鳴らない（pは真でqは偽）ならばrは偽である．他方，温度が 70℃以下である（pは偽）とき，警報が鳴ろうと鳴るまいと，命題rは**偽とはならない**（cannot possibly be false）．したがって，温度が 70℃以下であるときは常にrは真であるといえる．

ここで，２つの命題pとqを結合し，上の例で導入した“pならばq”と読む１つ命題を形成化する．pとqの２つの命題とする．命題“**pならばq**”（if p then q）とは$p \to q$で表わされ，pとqがともに真かまたはpが真でかつqが偽のとき偽である命題である．この複合命題“pならばq”は“**pはqを含意する**”（p implies q）とも読まれる．

複合命題“pならばq”を初めて見た読者は，この複合命題が，pが偽のときは，qが真であろうとなかろうといつでも真であるということについて，おそらくは，少し変に思うだろう．いくつかの例について，このことを検討してみよう．“努力するならば，成功する”という陳述について考察しよう．明らかに，努力し，そして成功するならば，この陳述は真である．努力しても，失敗するならば，この陳述は偽である．しかしながら，努力をしない場合には，この陳述が偽であると立証することはできない．偽でないことは，真であることを意味するので，努力をしない場合に対して，この陳述は真であると結論付けれる．

例１．来訪者はすべて，バッジを付けなければならないという，会社の警備員からの指示について考察しよう．この指示は，“来訪者ならば，バッジを付けている”という命題に言い換えられることに注意せよ．この指示が，実行されているかどうか（すなわち，この命題が真であるか）を調べるために，会社の中にいる人を１人ひとり呼び止めるとする．その人が来訪者ならば，バッジを身に付けているか否かを調べることによって，この指示が実行されているか否かを決定できる．一方，その人が来訪者でないときは，この指示が実行されていないと断定する方法はない．したがって，この陳述は真である．

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Ⅱ．p *if and only if* q（p であるのは q であるとき、かつこのときに限る）

命題“新機種のコンピュータが購入される”を p で表わし，命題“特別基金が利用できる”を q で表わす．このとき，命題“新機種のコンピュータが購入されるのは，特別基金が利用できるときかつこのときに限る”を考え，これを r で表わす．明らかに，特別基金田利用できるとき，実際に新機種のコンピュータが購入される（p と q がともに真）ならば，r は真である．また，特別基金が利用できないときは新機種のコンピュータが購入されない（p と q がともに偽）ならば，このとき命題 r は真である．他方，特別基金が利用できないにもかかわらず新機種のコンピュータが購入される（p が真で q が偽）か，または特別基金が利用できるにもかかわらず新機種のコンピュータが購入されない（p が偽で q が真）ならば r は偽である．

p と q を２つの命題とする．命題“p であるのは q であるときかつこのときに限る”（p if and only if q）とは，$p \leftrightarrow q$ で表わされ，p と q がともに真かまたは p と q がともに偽のとき真であり，p が真で q が偽のときと p が偽で q が真のとき偽である命題である．図 1.11 の真理値表は $p \leftrightarrow q$ の定義を示す．

例２　ある島には,２つの種族の先住民が住んでいる．一方の種族の先住民は，だれもが，いつも真実を述べるが，他方の種族の先住民は，だれもが，常に嘘をいう．ある人が，この島にやってきて，“この島には，金があるか”と先住民に尋ねた．その先住民は“この島に，金があるのは，わたしがいつも真実をいっているとき，かつ，このときに限る”と答えた．どちらの種族に，かれは尋ねたのだろうか．金は，この島にあるのだろうか．結局のところ，かれが尋ねた種族は特定できない．しかしながら，この島に金が存在するかどうかは決定できる．p で常に真実をいうという命題を表わし，q で島に金があるという命題を表わすとする．したがって，先住民の答は，$p \leftrightarrow q$ である．先住民が，いつも真実をいっているとする，すなわち，命題 p が真であるとする．したがって，質問に対する先住民の答は真でなければならない．すなわち，$p \leftrightarrow q$ は真である．結局，q は真でなければならない．先住民が，いつも嘘をいっている．すなわち，命題 p が偽であるとする．このとき，質問に対する先住民の答も偽である．これは，$p \leftrightarrow q$ が偽であることを意味している．結局，q は真でなければならない．以上より，この先住民がどちらの種族であろうとも，双方の場合とも，この島には，金があると推論できる．

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

含意と**同値条件**についてもう一度考えよう．そのために，二つの例題を示す．

含意（$p \to q$：p ならば q である）p implies q

お姉さんが妹に「給料が入ったら，時計をプレゼントする」とお約束しました．妹は「やったー」と喜びます．この約束を命題 r としましょう．どのようなときに，お姉さんは約束を守り，どのようなときに約束を破ったことになるでしょうか．すなわち，どのようなときに命題 r は真となり，どのようなときに偽となるでしょうか．

まず，この複合命題を以下のように考えましょう．

p ：給料が入る．

q ：時計をプレゼントする．

すなわち，r：$p \to q$（給料が入ったら，時計をプレゼントする）となります．ここで，二つの場合を考えましょう．

（Ⅰ）給料が入ったとき

- お姉さんが妹に時計をプレゼントすれば，約束を守ったことになり，命題 r は真となる．
- お姉さんが妹に時計をプレゼントしなければ，（たとえ，イチゴやケーキや JJ をプレゼントしても）約束を破ったことになり，命題 r は偽となる．

（Ⅱ）給料が入らなかったとき（お姉さんが突然会社をやめたときや会社の事情で給料が払えなくなったとき）このときは，時計をプレゼントしてもしなくても，給料が入ったわけでないので，お姉さんは約束をやぶったことにならない．従って，このときはどの場合（時計をプレゼントしてもしなくても）命題 r は偽にならない．

以下を真理値で表現すると次となる．

1） p が真で q が真→ r は真

2） p が真で q が偽→ r は偽

3） p が偽で q が真→ r は真

4） p が偽で q が偽→ r は真

同値条件（$p \leftrightarrow q$：p であるのは q であるとき，かつ，そのときに限る） p if and only if q

お兄さんが弟に，「パチンコで勝ったら，かつそのときに限り，クラブに連れて行ってあげる」とお約束しました．弟は当然「やったー」と喜びます．この約束を r としましょう．先ほどと同様に，どのようなときにお兄さんは約束を守り，どのようなときに約束を破ったことになるでしょうか．すなわち，どのようなときに命題 r は真となり，どのようなときに偽となるでしょうか．

まず，この複合命題を以下のように考えましょう．

p ：パチンコで勝つ．

q ：クラブに連れて行く．

（Ｉ）パチンコで勝ったとき

- お兄さんが弟をクラブに連れて行くなら，約束を守ったことになり命題ｒは真となる．
- お兄さんが弟をクラブに連れて行かなければ，約束を破ったことになり命題ｒは偽となる．

（Ⅱ）パチンコで負けたとき

- お兄さんが弟をクラブへ連れて行くなら，（負けても連れて行くのだから）約束を破ったことになり，命題ｒは偽となる．
- お兄さんが弟をクラブに連れていかないなら，（勝ったときに限りと約束しているから）約束を破ったことにならないので，命題ｒは真である．

（Ⅱ）の最初のケースでは，お兄さんが無理して弟をクラブに連れて行くのだから（弟にとってはうれしいことだか）間違いとは考えたくないと一瞬思いますが，**パチンコで勝ったら，かつ，そのときに限り，クラブに連れて行くという**お約束なので，この場合は約束を守らなかったことになり，命題ｒは偽となります．

以下を真理値で表現すると次となる．

５）　ｐが真でｑが真→ｒは真
６）　ｐが真でｑが偽→ｒは偽
７）　ｐが偽でｑが真→ｒは偽
８）　ｐが偽でｑが偽→ｒは真

含意：r ：$p \to q$　ｐはｑであるための　　条件で，ｑはｐであるための　　条件
同値条件：$p \leftrightarrow q$　ｐはｑであるための　　　条件で，また，ｑはｐであるための条件

恒真命題：常に真である命題　$p \wedge \overline{p}$ $p \vee \overline{p}$　ｐであるか，ｐでない．
矛盾命題：常に偽である命題　$p \wedge \overline{p}$　ｐであり，かつ，ｐでない．

証明の構造

ここでは，証明の方法として，直接法，背理法，対偶法による方法を示す.

ある仮定（p とする）のもとで，ある結論（q とする）が成り立つ.

すなわち，$p \to q$ が真であることを示す.

これを，**直接法**という.

背理法

次の真理表を考える.

p	q	$p \to q$	$\overline{q}$	$p \wedge \overline{q}$	$\overline{p \wedge \overline{q}}$	$\overline{p}$	$\overline{q} \to \overline{p}$
T	T	T	F	F	T		
T	F	F	T	T	F		
F	T	T	F	F	T		
F	F	T	T	F	T		

同値

すなわち，$p \to q$ を示すかわりに，$\overline{p \wedge \overline{q}}$ が真であることを示す.

$\overline{p \wedge \overline{q}}$ が真であるとは，$p \wedge \overline{q}$ が偽であること，すなわち，

“p が真であり，かつ q が真でないことは，偽である.”こと.

【例１】

“$x = y$ ならば $x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 = 0$ である”という命題を証明する.

直接法

仮定から $x = y$ であるから，与式を因数分解すると，

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 = 0$$

背理法

p ：$x = y$ である.

q ：$x^2 - 2xy + y^2 = 0$ である.

まず p が真であるもとで q が偽であると仮定する.

このとき，$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 \neq 0$　これは，p が真すなわち，$x = y$ という仮定に反する.

したがって，矛盾が生じ，$p \wedge \overline{q}$ は偽 $\Rightarrow$ $\overline{p \wedge \overline{q}}$ は真，$\Rightarrow$ $p \to q$ は真.

対偶法

まず，上の真理値表を埋めていこう．

$p \to q$ の代わりに，$\overline{q} \to \overline{p}$ を証明する．すなわち，$x^2 - 2xy + y^2 \neq 0$ ならば $x \neq y$ を示す．

即ち，$x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 \neq 0$ ならば，$x \neq y$ が示される．

以下，背理法による証明を見ていこう．

【例２】

$\sqrt{2}$ が無理数であることを示す．

（無理数：整数の比で表わせない数）

p ：$\sqrt{2}$ が無理数

q ：整数の比で表わせない

No.

２

まず，p が真のもとで，q が偽であると仮定．

すなわち，

$\overline{q}$ ：$\sqrt{2} = \dfrac{b}{a}$ ・・・（１）

ここに当然のことながら a，b は互いに素であるとする．このとき，（１）より，

$2a^2 = b^2$ ・・・（２）

（２）より，b は偶数であるから $b = 2m$ とおくと，

$2a^2 = 4m \quad \therefore \quad a^2 = 2m^2$ ・・・（３）

となり，a も偶数である．

すると，$a = 2n$ とおくと，

$\dfrac{b}{a} = \dfrac{2m}{2n}$ となり，互いに素であるという仮定に矛盾．

したがって，$\sqrt{2}$ は整数の比で表わせない．

$p \wedge \overline{q}$ は偽 $\Rightarrow$ $\overline{p \wedge \overline{q}}$ は真 $\Rightarrow$ $p \to q$ は真．

素因数分解の一意性定理

２以上の整数は素数の積に分解される．

たとえば，$6 = 2 \times 3$，$30 = 2 \times 3 \times 5$，$2310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$

【例３】

p ：２以上のすべての整数は素因数分解可能.

q ： 最大の素数は存在しない.

$p \to q$ （２以上のすべての整数は素因数分解可能であるから，
最大の素数は存在しない）

$\overline{q}$ ：最大の素数が存在し，それを N とする.

今，数 M をすべての素数の積に１を加えたものとする．すなわち，

$$M = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot \cdots \cdot N) + 1$$

すると，M は，２，３，・・・N を約数としない（２～N，のどれで割っても１あまる）から，N より大きい素数の約数を持つか，M がそれ自身素数である.
したがって，そのことは，N より大きい素数が存在する．これは N が最大の素数であるという仮定に矛盾.

よって，$p \wedge \overline{q}$ は矛盾である．したがって，$\overline{p \wedge \overline{q}}$ は真，ゆえに $p \to q$ は真となる.

論理関数から論理式を求めるアルゴリズム

今、二変数(X_1, X_2)の論理関数$F_i(X_1, X_2)$を考える．このとき，与えられた入力値(X_1, X_2)と論理関数$F_i(X_1, X_2)$から論理式を求めるアルゴリズム（手続き）を以下で示す.

Step. 1　入力値(X_1, X_2)，$F_i(X_1, X_2)$.

Step. ２　入力値を加法標準形に代入

$$F_i(X_1, X_2) = F_i(0,0)\bar{X}_2 \cdot \bar{X}_1 + F_i(0,1)X_2 \cdot \bar{X}_1 + F_i(1,0) \cdot \bar{X}_2 \cdot X_1 + F_i(1,1) \cdot X_2 \cdot X_1$$

例１. $F_8(X_1, X_2)$の論理式を求める.

Step. 1　入力値：$(X_1, X_2) = (0,0), (X_1, X_2) = (0,1), (X_1, X_2) = (1,0), (X_1, X_2) = (1,1)$

論理関数：$F_8(0,0) = 1, F_8(0,1) = 0, F_8(1,0) = 0, F_8(1,1) = 1,$

Step. 2

$$\begin{aligned} F_8(X_1, X_2) &= F_8(0,0)\bar{X}_2 \cdot \bar{X}_1 + F_8(0,1)X_2 \cdot \bar{X}_1 + F_8(1,0) \cdot \bar{X}_2 \cdot X_1 + F_8(1,1) \cdot X_2 \cdot X_1 \\ &= 1 \cdot \bar{X}_2 \cdot \bar{X}_1 + 0 \cdot X_2 \cdot \bar{X}_1 + 0 \cdot \bar{X}_2 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 \cdot X_1 \\ &= \bar{X}_2 \cdot \bar{X}_1 \end{aligned}$$

一方，入力関数と論理関数について以下の関係が成り立つ.

X_1	X_2	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	$\bar{X}_1 \cdot \bar{X}_2$	$X_1 + X_2$	$\overline{X_1 + X_2}$
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0

したがって，$\bar{X}_1 \cdot \bar{X}_2 = \overline{X_1 + X_2}$が示された.

補則：論理式の基本は AND，OR，NOT であるが，もちろん，それ以外の関数で表現することも可能である．OR 関数をみてみよう.

X_1	X_2	$X_1 + X_2$	$\bar{X}_1 \cdot \bar{X}_2$	$\overline{\bar{X}_1 \cdot \bar{X}_2}$
0	0	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	0	1

となり，OR 関数は

$$X_1 + X_2 = \overline{\bar{X}_1 \cdot \bar{X}_2}$$

で表現できる．すなわち，OR 演算は，AND 演算と NOT 演算で表現できる．これは，ド・モルガンの法則による AND，OR 演算の相互入れ替えである．さて，上式の否定をとると

$$\overline{X_1 + X_2} = \bar{X}_1 \cdot \bar{X}_2$$

となる．すなわち，$F_8(X_1, X_2) = X_1 + X_2 = \overline{\bar{X}_1 \cdot \bar{X}_2}$ が示された．また，同様に，AND 演算は OR 演算と NOT 演算で表現できる．AND 関数を見てみよう．

X_1	X_2	$X_1 \cdot X_2$	$\overline{X_1 \cdot X_2}$	$\bar{X}_1 + \bar{X}_2$	$\overline{\bar{X}_1 + \bar{X}_2}$
0	0				
0	1				
1	0				
1	1				

この論理関数より $X_1 + X_2 = \overline{\bar{X}_1 + \bar{X}_2}$ が成立することがわかる．さらに，この式の否定をとると，

$F_{14}(X_1, X_2) = \overline{X_1 \cdot X_2} = \bar{X}_1 + \bar{X}_2$ を得る．

公理と演繹：

演繹法：前提とされた命題から論理上の規則に従って結論を導き出す方法．三段論法はその典型である．（A→B である．B→C である．よって，A→C である）

ユークリッド先生の「原論」は『いくつかの明らかと思われる事実』から出発して，全ての結果を演繹するように書かれていた．そこで,『出発点となる明らかな事実』を公理および公準と呼ぶ．現代数学においては，研究対象が持つべき共通の性質をすべて書き上げ，そこから，これらの性質を基に，種々の定理を演繹していく．この出発点となる性質を公理という．（教科書 7 ページ：1.2 数学的帰納法との対比を参考にしてください）

Boole 束の公理系

有限集合における束とは, 集合の要素間に結び$\vee$, および, 交わり$\wedge$の演算が定められており，かつ，任意の２つの要素に対し，上限，下限が存在することである．

Boole 束：零元０と単位元１の存在する束$(B;\vee,\wedge)$において，分配律が成立し，かつ，すべての要素に補元が存在する束のことを Boole 束という．ここに，aの補元はa'と記述する．

Boole 代数の公理系（教科書 59 ページ）

$(B1)$　$a \vee b = b \vee a$　（交換則）

$(B1)$　$a \wedge b = b \wedge a$　（交換則）

$(B3)$　$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$　（分配則）

$(B4)$　$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$　（分配則）

$(B5)$　$a \vee 0 = a$

$(B5)'$　$a \vee 1 = 1$

$(B6)$　$a \wedge 0 = 0$

$(B6)'$　$a \wedge 1 = a$

$(B7)$　$a \vee a' = 1$

$(B8)$　$a \wedge a' = 0$

$(B9)$　$0 \neq 1$　$(0' = 1, 1' = 0)$

この公理系を用いて次のことを示す.

(1)　$a'' = a$

$$
\begin{aligned}
a'' &= a'' \wedge 1 && (B6)' \\
&= a'' \wedge (a \vee a') && (B7) \\
&= (a'' \wedge a) \vee (a'' \wedge a') && (B4) \\
&= (a'' \wedge a) \vee 0 && (B8) \\
&= (a'' \wedge a) \vee (a' \wedge a) && (B8) \\
&= a \wedge (a'' \vee a') && (B4) \\
&= a \wedge 1 && (B7) \\
&= a && (B6)
\end{aligned}
$$

演習問題．６

（1）　$a \wedge (a \vee b) = a$

$$
\begin{aligned}
a \wedge (a \vee b) &= (a \vee 0) \wedge (a \wedge b) && (B5) \\
&= a \vee (b \wedge 0) && (B3) \\
&= a \vee 0 && (B6) \\
&= a && (B5)
\end{aligned}
$$

（２）$a \vee b = 1$かつ，$a \wedge b = 0$ならaの補元はbである.

$$
\begin{aligned}
a &= a \vee 0 && (B5) \\
&= a \vee (b \wedge b') && (B8) \\
&= (a \vee b) \wedge (a \vee b') && (B3) \\
&= 1 \wedge (a \vee b') && (\text{仮定}a \vee b = 1\text{より}) \\
&= (b \vee b') \wedge (a \vee b') && (B7) \\
&= b' \vee (a \wedge b) && (B3) \\
&= b' \vee 0 && (\text{仮定}a \wedge b = 0\text{より}) \\
&= b' && (B5)
\end{aligned}
$$

演習　１．次の論理式の論理関数を構成しなさい．

$$(1)\ F(X_1, X_2) = X_1 \cdot (\overline{X}_1 + X_2) + \overline{X}_2 \cdot (X_1 + \overline{X}_2)$$

$$(2)\ F(X_1, X_2) = (X_1 + X_2) \cdot (\overline{X}_1 + \overline{X}_2)$$

$$(3)\ F(X_1, X_2, X_3) = X_1 \cdot (\overline{X}_2 + X_3 \cdot (\overline{X}_1 + X_2))$$

演習　２．$a \vee (a \wedge b) = a$ が成立することを公理的に示しなさい．

演習　３．集合 $A = \{a, b\}$ のべき集合は包含関係の和，および，積の演算 $(\bigcup, \bigcap)$ に関しブール束 $(A : \bigcup, \bigcap)$ であることを示しなさい．

（１）　まず，べき集合の要素を求める．

（２）　単位元，零元を定義する．

（３）　分配則が成立することを確認する．

（４）　すべての元に対する補元を求める．（相補束）

解答　7 月 14 日

【演習１】

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \to \overline{q}$	$q \to \overline{p}$
T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

ケーキは美味しい　p

ケーキは安い　q

美味しいケーキは安くない　$p \to \overline{q}$

安いケーキは美味しくない　$\overline{q} \to p$

$p \to \overline{q}$

逆

$$
\begin{tikzcd}
p \to \overline{q} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, <->] & \overline{q} \to p \arrow[d] \arrow[dl, <->] \\
\overline{p} \to q \arrow[r] & q \to \overline{p}
\end{tikzcd}
$$

裏　対偶

【演習２】

$p \to q$

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

$\overline{p} \vee q$

p	q	$\overline{p}$	$\overline{p} \vee q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

$\overline{p} \to \overline{q}$

$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \to \overline{q}$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

$\overline{q} \to \overline{p}$

$\overline{q}$	$\overline{p}$	$\overline{q} \to \overline{p}$
F	F	T
T	F	F
F	T	T
T	T	T

$q \to p$

q	p	$q \to p$
T	T	T
F	T	T
T	F	F
F	F	T

p	$\overline{q}$	$\overline{q} \vee p$
T	F	T
T	T	T
F	F	F
F	T	T

$\overline{p \wedge \overline{q}} = \overline{p} \vee q$

p	q	$\overline{q}$	$p \wedge \overline{q}$	$\overline{p \wedge \overline{q}}$	$\overline{p} \vee q$
T	T	F	F	T	T
T	F	T	T	F	F
F	T	F	F	T	T
F	F	T	F	T	T

【演習３】

p りんごが好きだ.

q アップルパイが好きだ.

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

りんごが好きだ. p

りんごが好きならアップルパイが好きだ. $r : p \to q$

上記陳述はどちらも真実, または, うそである.

p	q	$r : p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

さらにr : $p \to q$ である. ここで, $p \to q$ の真理表について, p , r はどちらも真もしくは偽である. しかし, p , r ともに真の場合はあるが, ともに偽であることはない.

したがって, 真実を述べているので, A子さんはりんごが好きだ.

【演習４】

p ならば p である

p	p	$p \to p$
T	T	T
F	F	T

p であるか, または p でない

p	$\overline{p}$	$p \vee \overline{p}$
T	F	T
F	T	T

$\overline{p \wedge \overline{p}}$ p かつ p でないことはない

p	$\overline{p}$	$p \wedge \overline{p}$	$\overline{p \wedge \overline{p}}$	$\overline{p} \vee p$
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T

$p \wedge \overline{p}$ p であり, かつ p でない

p	$\overline{p}$	$p \wedge \overline{p}$
T	F	F
F	T	F

演習問題Ⅰ　7 月 14 日

［演習１］

次のような２軒の店Ａ，Ｂがある．

店Ａの看板には，“美味しいケーキは，安くない”と書いてあり，

店Ｂの看板には，“安いケーキは，美味しくない”と書いてある．

これら２つの看板は，同じことを述べているのかどうか決定せよ．

［練習２］

命題A「pならばqである」について，下記の①～⑥の命題のうちからAと同値な命題を選び出し，①～⑥の番号で答えよ．

①　「pでないかまたはqである」

②　「pでないならばqでない」

③　「qでないならばpでない」

④　「qならばpである」

⑤　「qでないか，またはpである」

④　「pであってかつqでないことはない」

［練習３］

Ａ子さんが以下の２つのことを述べた．

(1) わたしは，りんごが好きだ．

(2) わたしが，りんごを好きならば，アップルパイが好きだ．

Ａ子さんがいったことはどちらとも真実であるか，あるいはどちらともうそであるとする．Ａ子さんが，りんごを本当に好きかどうかを決定せよ．

［練習　４］

次の命題の真理表をつくれ．また，各命題がトートロジーか矛盾命題かを述べよ．

(1)　$p \to p$

(2)　$p \vee \overline{p}$

(3)　$\overline{p \wedge \overline{p}}$

(4)　$p \wedge \overline{p}$

命題演習

【問題１】

（１）　以下の p,q,r に対して、命題 $(p\wedge q)\rightarrow r$ とその否定は、どういう命題か答えよ.

p ：　朝早く起きる.

q ：　体操をする.

r ：　健康になる.

（２）　以下の p,q,r に対して、命題 $(p\vee q)\rightarrow r$ とその否定は、どういう命題か答えよ.

p ：　ごはんを３杯食べる.

q ：　ウーロン茶を１リットル飲む.

r ：　おなかがいっぱいになる.

（３）　以下の p,q,r に対して、命題 $p\rightarrow(q\wedge r)$ とその否定は、どういう命題か答えよ.

p ：　臨時収入が入る.

q ：　旅行に出かける.

r ：　レストランでフルコースディナーを食べる.

（４）　以下の p,q,r に対して、命題 $p\rightarrow(q\vee r)$ とその否定は、どういう命題か答えよ.

p ：　愛犬ポチが鳴く.

q ：　ポチはおなかが減っている.

r ：　不審人物が訪ねて来ている.

【問題２】

以下の命題 p,q について、命題 $p\rightarrow q$ とその否定命題を求めよ．また、各命題の逆と対偶は何かを答えよ.

（１） p ：　風が吹く.

q ：　桶屋がもうかる.

（２） p ：　雨が降る.

q ：　運動会が延期になる.

（３） p ：　勉強をする.

q ：　試験で良い成績をとる.

命題演習解答【問題１　解答】

（１）$(p \wedge q) \to r$ ：朝早く起きて、体操をするならば、健康になる。

$\overline{(p \wedge q) \to r} \equiv \overline{\overline{p \wedge q} \vee r} \equiv \overline{\overline{p \wedge q}} \wedge \bar{r} \equiv (p \wedge q) \wedge \bar{r}$ ：

朝早く起きて、体操をするが、健康にならない。

（２）$(p \vee q) \to r$ ：ごはんを３杯食べるか、ウーロン茶を１リットル飲むならば、おなかがいっぱいになる。

$\overline{(p \vee q) \to r} \equiv \overline{\overline{p \vee q} \vee r} \equiv \overline{\overline{p \vee q}} \wedge \bar{r} \equiv (p \vee q) \wedge \bar{r}$ ：

ごはんを３杯食べるか、ウーロン茶を１リットル飲んでも、おなかいっぱいにならない。

（３）$p \to (q \wedge r)$ ：臨時収入が入るならば、旅行に出かけるし、かつレストランでフルコースディナーを食べる。

$\overline{p \to (q \wedge r)} \equiv \overline{\bar{p} \vee (q \wedge r)} \equiv \bar{\bar{p}} \wedge \overline{q \wedge r} \equiv p \wedge (\bar{q} \vee \bar{r})$ ：

臨時収入が入っても、旅行に出かけないか、レストランでフルコースディナーを食べない。

（４）$p \to (q \vee r)$ ：愛犬ポチが鳴くならば、ポチはおなかが減っているか、不審人物が訪ねてきている。

$\overline{p \to (q \vee r)} \equiv \overline{\bar{p} \vee (q \vee r)} \equiv \bar{\bar{p}} \wedge \overline{q \vee r} \equiv p \wedge (\bar{q} \wedge \bar{r})$ ：

愛犬ポチが鳴いても、ポチはおなかが減っていないし、不審人物が訪ねて来ていない。

【問題２　解答】

命題$p \to q$とその否定

（１）$p \to q$ ：風が吹けば、樋屋がもうかる。

$\overline{p \to q} \equiv p \wedge \bar{q}$ ：風が吹くのに、樋屋がもうからない。

（２）$p \to q$ ：雨が降れば、運動会が延期になる。

$\overline{p \to q} \equiv p \wedge \bar{q}$ ：雨が降るのに、運動会が延期にならない。

（３）$p \to q$ ：勉強をすれば、試験で良い成績をとる。

$\overline{p \to q} \equiv p \wedge \bar{q}$ ：勉強をするのに、試験で良い成績をとれない。

各命題の逆と対偶

（１）　逆：樋屋がもうかるならば、風が吹く。

対偶：樋屋がもうからないならば、風が吹かない。

（２）　逆：運動会が延期になるならば、雨が降る。

対偶：運動会が延期にならないならば、雨が降らない。

（３）　逆：試験でよい成績をとるならば、勉強をする。

対偶：試験でよい成績をとらないならば、勉強をしない。

演習１．（１）

X_1	X_2	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	$(\bar{X}_1 + X_2)$	$X_1(\bar{X}_1 + X_2)$	$(X_1 + \bar{X}_2)$	$\bar{X}_2 \cdot (X_1 + \bar{X}_2)$	$X_1(\bar{X}_1 + X_2) + \bar{X}_2 \cdot (X_1 + \bar{X}_2)$
0	0							
0	1							
1	0							
1	1							

（２）

X_1	X_2	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	$(X_1 + X_2)$	$(\bar{X}_1 + \bar{X}_2)$	$(\bar{X}_1 + \bar{X}_2) \cdot (X_1 + X_2)$
0	0					
0	1					
1	0					
1	1					

（3）

X_1	X_2	X_3	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	$\bar{X}_1 + X_2$	$X_3 \cdot (\bar{X}_1 + X_2)$	$\bar{X}_2 + X_3 \cdot (X_1 + \bar{X}_2)$	$X_1 \cdot (\bar{X}_2 + X_3 \cdot (X_1 + \bar{X}_2))$
0	0	0						
0	0	1						
0	1	0						
0	1	1						
1	0	0						
1	0	1						
1	1	0						
1	1	1						

２． $a \vee (a \wedge b) = a$ が成立することを公理的に示しなさい．

$$a \wedge (a \vee b) = a$$

$$\begin{aligned} a \vee (a \wedge b) &= (a \wedge 1) \vee (a \wedge b) && (B5)' \\ &= a \wedge \{1 \vee (a \wedge b)\} && (B3) \\ &= a \wedge \{(1 \vee a) \wedge (1 \vee b)\} && (B3) \\ &= a \wedge 1 = a && (B6)' \end{aligned}$$

３．集合 $A = \{a, b\}$ のべき集合は包含関係の和，および，積の演算 $(\bigcup, \bigcap)$ に関しブール束 $(A : \bigcup, \bigcap)$ であることを示しなさい．

（１） まず，べき集合の要素を求める．

（２） 単位元，零元を定義する．

（３） 分配則が成立することを確認する．

（４） すべての元に対する補元を求める．（相補束）

（１）べき集合の要素は

$$\{\,\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\,\}$$

（２）単位元 $I = \{a,b\}$ ，零元 $0 = \phi$

（４）束の結び $(\bigcup : \sup)$ ，交わり $(\bigcap : \inf)$ に対する演算表は以下で与えられる．

$\bigcup$	ϕ	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
ϕ	ϕ	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$

$\bigcap$	ϕ	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
ϕ	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ
$\{a\}$	ϕ	$\{a\}$	ϕ	$\{a\}$
$\{b\}$	ϕ	ϕ	$\{b\}$	$\{b\}$
$\{a,b\}$	ϕ	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$

従って，全ての要素間に上限，下限が定義されており，かつ，すべての要素が補元を持つため，この集合 A のべき集合 $\rho^{|A|} = \{\,\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\,\}$ は，結び，交わりの演算に関し束となる．