report2

学籍番号:075739A　　　氏名:津波古 正輝　　　提出日:2008/6/3

Pascal 分布の確率関数は、次式で定義される。

$P(X=k)=\frac{1}{1+\mu}(\frac{\mu}{1+\mu})^k \qquad (\mu>0, k=0,1,2,...)$

(1) 確率変数であることを証明せよ。

まず $A=\frac{\mu}{1+\mu}$ とする。　$\cdots$(a)

$A(1+\mu)=\mu$

$A+A\mu=\mu$

$A=\mu(1-A)$

$\mu=\frac{A}{1-A}$ より

$P(X=k)=\frac{1}{1-\frac{A}{1-A}}(A)^k \qquad (\mu>0, k=0,1,2,...)$

$=\frac{1}{\frac{1}{1-A}}(A)^k$

$=(1-A)(A)^k$

$=A^k-A^{k+1}$　より

$P(X=k)=A^k-A^{k+1}$ と変形できる。

Pascal 分布は離散的なものなので $0\leq P(x=k)\leq 1$　かつ　$P(\Omega)=\sum_{k=0}^{n} W_k=1$　を満たしていれば P(X) は確率関数であることが証明できる。よって、$\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)$ という計算をしたいのだが、この式だとうまくいかない。なので意味的に同じ $\lim_{h\to\infty}\sum_{k=0}^{n} P(X=k)$ を計算する。(n 項までの和を求めてリミットで n を無限大にもっていく。n を無限大にするのはすべての場合を考えるからである)

$\lim_{h\to\infty}\sum_{k=0}^{n} P(X=k)=\lim_{h\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(A^k-A^{k+1})$

$=\lim_{h\to\infty}\sum_{k=0}^{n} A^k-\sum_{k=0}^{n} A^{k+1}$

$\sum_{k=0}^{n} A^k=1+A+A^2+A^3+\cdots+A^n$

$\sum_{k=0}^{n} A^{k+1}=A+A^2+A^3+\cdots+A^n+A^{n+1}$　より

$\sum_{k=0}^{n} A^k-\sum_{k=0}^{n} A^{k+1}=1-A^{n+1}$

ここで A について考える。(1)、$\mu>0$ より A は 1 以下の分子 $<$ 分母の関係の正の分数である

よって、$\lim_{h\to\infty} A^n = \infty$ ということが分かる。つまり、

$\lim_{h\to\infty}(\sum_{k=0}^{n} A^k - \sum_{k=0}^{n} A^{k+1}) = \lim_{h\to\infty}(1 - A^{n+1})$

$=1$ より

確率関数の条件を満たす。

(2) 期待値を求めよ。

期待値の公式

$$E[X] = \sum_{k=0}^{n} kP(X)$$

(1) で使用した式を利用。また、$\sum_{k=0}^{\infty}$ では、うまく計算できないので、(1) 同様にシグマで第 n 項までの和を求めてからリミットで n を無限大にもっていく。(無限大にもっていく理由は (1) と同じ)

$\sum_{k=0}^{n} k(A^k - A^{k+1})$

$=\sum_{k=0}^{n} kA^k - \sum_{k=0}^{n} kA^{k+1}$

$\sum_{k=0}^{n} kA^k = 0 + A + 2A^2 + 3A^3 + \cdots + nA^n$

$\sum_{k=0}^{n} kA^{k+1} = 0 + A^2 + 2A^3 + \cdots + (n-1)A^n + nA^{n+1}$ より

$\sum_{k=0}^{n} kA^k - \sum_{k=0}^{n} kA^{k+1} = (A + A^2 + A^3 + \cdots + A^n) - nA^{n+1}$

（ ）で囲まれている部分で、等比数列の和の公式が使えるので、それでうまくまとめる。

初項=A、公比=A、項数=n より、$\frac{A(1-A^n)}{1-A} - nA^{n+1}$ となる。

このリミットをとればいいので、

$\lim_{n\to\infty} \frac{A(1-A^n)}{1-A} - nA^{n+1}$

を計算すればよい。ここで (1) と同様の理由で $\lim_{n\to\infty} A^n = 0$ となるので、

$\lim_{n\to\infty} \frac{A(1-A^n)}{1-A} - nA^{n+1}$

$= \frac{A}{1-A}$ となる。あとは A を元に戻せばいいので、(a) より

$= \frac{\frac{\mu}{1+\mu}}{1-\frac{\mu}{1+\mu}}$

$= \mu$

となる。よって、期待値は μ である。

(3) 分散を求めよ。

分散の公式: $V[x] = E[(x - E[x])^2] = E[x^2] - E[x]^2$

$E[X]^2$は (2) で $E[x]$ を求めてるので、μ^2ということがすぐに分かる。

問題は $E[X^2]$ である。

$$\begin{aligned}E[X^2] &= \sum_{k=0}^{n} k^2(1-A)(A)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} k^2A^k - \sum_{k=0}^{n} k^2A^{k+1}\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2A^k = 0 + A + 2^2A^2 + 3^2A^3 + \cdots + n^2A^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2A^{k+1} = 0 + A^2 + 2^2A^3 + ... + (n-1)^2A^n + n^2A^{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2A^k - \sum_{k=0}^{n} k^2A^{k+1} = A + 3A^2 + 5A^3 + 7A^4 + \cdots + (2n-1)^2A^n - n^2A^{n+1}$$

まだわかりにくい。工夫してみる。今、計算した結果に A を掛け、その A を掛けたものと今の計算結果とで計算する。

分かりやすくする為に、今の計算結果を B とおく。

$$\sum_{k=0}^{n} k^2A^k - \sum_{k=0}^{n} k^2A^{k+1} = B$$

$$AB = A^2 + 3A^3 + 5A^4 + 7A^5 + \cdots + (2n-1)^2A^{n+1} - n^2A^{n+2}$$

B-AB をする。

$$B - AB = A + 2A^2 + 2A^3 + 2A^4 + \cdots + 2A^n + 2A^{n+1}) + n^2A^{n+2} \cdots (c)$$

すると、$B - AB = A + (2A^2 + 2A^3 + 2A^4 + \cdots + 2A^n + 2A^{n+1}) + n^2A^{n+2}$ のカッコで囲まれた部分が等比数列の公式で簡略化できる状態になる。

$$2A^2 + 2A^3 + 2A^4 + \cdots + 2A^n + 2A^{n+1} = \frac{2A^2(1-A^n)}{1-A}$$

また、(c) の左辺を B でまとめて B=の形にすると

$$B = \frac{A + \frac{2A^2(1-A^n)}{1-A} + n^2A^{n+2}}{1-A}$$

となる。⋯(d)

そろそろ終盤なのだが、一体この計算は何を求めているだろうか。この計算は $E[X^2]$ を求めるものである。そしてこの時点で $E[X^2] = \sum_{k=0}^{n} k^2A^k - \sum_{k=0}^{n} k^2A^{k+1} = B$ となっている。つまり、(d) の計算結果の n を無限大に範囲を広げればよい。(理由は (1) と同様)

よって

$$\lim_{n\to\infty} B = \lim_{n\to\infty} \frac{A + \frac{2A^2(1-A^n)}{1-A} + n^2A^{n+2}}{1-A}$$

ここで A の性質より

$=\dfrac{A + \frac{2A^2}{1-A}}{1-A}$ となる

これを計算すると

$=\dfrac{A^2 + A}{(1-A)^2}$ となる

あとは A を元に戻すと、

$=2\mu^2 + \mu$

となる
よって、$E[X^2] = 2\mu^2 + \mu$ より
求める分散は
$V[X] = E[X^2] - E[X]^2$より
$=2\mu^2 + \mu - (\mu)^2$ $=\mu^2 + \mu$
よって分散は $\mu^2 + \mu$ である。