確率及び統計：レポート3

氏名:津波古正輝
学籍番号:e075739A
提出日

平成 20 年 6 月 13 日

ある連続確率変数の確率密度関数が次式で与えられたとする。

$$W(x) = \begin{cases} ae^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

(1)W(x) が確率密度関数となるように、定数 a を定めよ。
(2) この確率変数の特性関数を求めよ。
(3) この確率変数の期待値と分散を特性関数を利用して求めよ。

(1)
連続確率変数なので、確率密度関数となるためには、

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x)dx = 1$$

x≤0 で W(x) は 0 という条件なので、0 から無限大の範囲を考える。

$$\int_{0}^{\infty} W(x)dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} ae^{-\lambda x}dx$$

$$= a\int_{0}^{\infty} e^{-\lambda x}dx$$

$$= a[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}]$$

$$= -\frac{a}{\lambda}(0-1)$$

$$= \frac{a}{\lambda} \quad \text{より、}$$

$$a = \lambda$$

(2)
この確率変数の特性関数を求めよ。

$$\phi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\epsilon x} a e^{-\lambda} dx$$

W(x) は、x≤ で 0 なので

$$\int_{0}^{\infty} e^{i\epsilon x} a e^{-\lambda} dx \text{ となる。}$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{i\epsilon x} a e^{-\lambda} dx$$

$$= a \int_{0}^{\infty} e^{i\epsilon x} e^{-\lambda} dx$$

$$= a \int_{0}^{\infty} e^{(i\epsilon - \lambda)x} dx$$

$$= a \frac{1}{i\epsilon - \lambda} [e^{(i\epsilon - \lambda)}]_0^{\infty}$$

ここで、i$\epsilon < \lambda$ とする。

$$= a \frac{1}{i\epsilon - \lambda} (0 - 1)$$

$$= \frac{a}{\lambda - i\epsilon}$$

(1) より、$(=\dfrac{\lambda}{\lambda - i\epsilon})$

i$\epsilon > \lambda$ とすると、発散するので、不適。

(3)

期待値を求める。定義から

$$E[X] = \int_0^\infty x\lambda\, e^{-\lambda x} dx$$

普通にはできないので、部分積分法を用いる。

$$= \left[-x\, e^{-\lambda x}\right]_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-\lambda x}) dx$$

$\left[-x\, e^{-\lambda x}\right]_0^\infty = 0$ より、

$$-\left[\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{\lambda}[e^{-\lambda x}]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{\lambda}$$

分散を求める。定義から

$$V[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

期待値を求めたので、$E[X] = \dfrac{1}{\lambda}$ とわかる。問題は $E[X^2]$ である。

$$= \int_0^\infty x^2 \lambda\, e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2}$$

部分積分法を用いる。

$$= \left[-x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^\infty - \int_0^\infty (-2x) e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2}$$

$\left[-x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^\infty = 0 - 0$ より、0。

$$\int_0^\infty (-2x) e^{-\lambda x} dx = -2 \int_0^\infty (x) e^{-\lambda x}$$

ここで (1) より、$\int_0^\infty (x)e^{-\lambda x} = \frac{1}{\lambda^2}$ 　より、

$$\int_0^\infty (-2x)e^{-\lambda x}dx = -\frac{2}{\lambda^2} \quad \text{よって}$$

$$V[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

$$\frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$