確率及び統計：レポート 4
氏名：津波古正輝
学籍番号：075739A
提出日：6 月 24 日 (火曜日)

確率変数 X_1, X_2 は互いに独立な正規分布に従い、期待値と分散は次の通りである。

$$X_1 \sim N(-1, 8) \quad X_2 \sim N(1, 2)$$

確率変数 Y は次式で表される。

$$Y = X_1 + 2X_2$$

(1) **確率変数 Y の分布を求めよ。**
2 つの同じ属性を持ち、互いに独立な確率変数は、その和の確率分布も、同じ属性に含まれる性質がある。このことを再生性という。この問題の場合、X_1 、$2X_2$ ともに独立であり、正規分布である。よって、次の公式が使える。

$$X_i \sim N(\mu, \sigma_i^2)(i = 1, 2) \rightarrow X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

$X_1 \sim N(-1, 8)$ 　$X_2 \sim N(1, 2)$ より
$Y \sim N(-1 + 2(1), (2\sqrt{2})^2 + (2 \times \sqrt{2})^2 = N(1, 16)$

(2) P (Y > 0) **を求めよ。**
確率変数の変換より、
$Z = \frac{Y-\mu}{\sigma}$,$\mu = 1$,$\sigma = 4$ よって　　$Z = \frac{Y-1}{4}$
$X_1 + X_2 > 0$ より、$Z = \frac{Y-1}{4} > 0$
$\frac{0-1}{4} = -0.25$ より、　　$Z > -0.25$
正規分布表の表より (p209)
$\phi(z) = \int_z^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$ で　$z = 0.25$ より、　　$\phi = 0.4013$
正規分布は偶関数という性質を持っているので、
$P(Y > 0) = P(Z > -0.4013)$

$$= 0.5 - 0.4013 + 0.5 \leftarrow \text{偶関数の性質} \left(\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx - \int_{0.25}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx + \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx\right)$$
$$=0.5987$$

(3) P（ー2 <Y< 3) **を求めよ。**
確率変数の変換の式より、
P (Y > -2) の時
$Z=\frac{-2-1}{4}=-0.75$
正規分布表の表より $(p209)$ $\phi=0.2266$

P (Y < -3) の時
$Z=\frac{3-1}{4}=0.5$
正規分布表の表より $(p209)$ $\phi=0.3085$

ここで、正規分布の偶関数の性質より、簡単なイメージで表すと (正式な式ではない)

$$\phi(z)=\int_{-0.75}^{0.5}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}dx \text{ の範囲は}$$
$$\left(\int_0^\infty-\int_{0.5}^\infty\right)\times 2 \text{ と } \rightarrow \left(\int_{-0.5}^{0.5} \text{ の部分 } \right)$$
$$\left(\int_{0.5}^\infty-\int_{0.75}^\infty\right) \text{ の } \rightarrow \left(\int_{-0.75}^{-0.5} \text{ の部分 } \right)$$

の部分の計算でできる。

$$2\int_0^\infty -2\int_{0.5}^\infty+\int_{0.5}^\infty-\int_{0.75}^\infty$$
$$=2\int_0^\infty-\int_{0.5}^\infty-\int_{0.75}^\infty$$
正規分布表より、
$$\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}dx \text{ の値は } 0.5$$
$$\int_{0.5}^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}dx \text{ の値は } 0.3085$$
$$\int_{0.75}^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}dx \text{ の値は } 0.2266$$

よって

P（－2 <Y< 3)=2(0.5)-0.3085-0.2266=1-0.5351=0.4649

(4) P（| Y ー 1| ≥1) **を求めよ。**
$P(|Y-1|\geq 1)=P(-1\leq Y-1\leq 1)$
$=P(0\leq Y\leq 2)$ より

P (Y > 0) の時、$Z=\frac{0-1}{4}=-0.25$
正規分布表の表より $(p209)$ $\phi=0.4013$

P (Y < 2) の時、$Z=\frac{2-1}{4}=0.25$
正規分布表の表より $(p209)$ $\phi=0.4013$
正規分布の偶関数性質より、

$$\text{P (| Y − 1| ≥1) =2(}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}-\int_{0.25}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}})$$
$$=2(0.5\text{-}0.4013)=0.1974$$

(5) P (Y < a) = 0.99 となる a の値を求めよ。
正規分布表より、0.99 は Z が 0 の場合の 0.5 より大きい。なので、z はマイナス値ということが推測される。そのことを考えて式を作ると、$\int_0^\infty+\int_0^\infty-\int_a^\infty$ のような形になると予想できる。つまり、

$$0.5+0.5-a\text{から求めた正規分布の値}$$

$$(1-a\text{から求めた正規分布の値}=0.99)$$

となり、a から求めた正規分布の値は、0.01 に限りなく近いと予想できる。(問題の = 0.99 より)
正規分布表より、$\int_Z^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}dx$ が限りなく 0.01 となる値 Z は Z=2.33 の 0.00990 の時。確率関数変換の式より、$Z=\frac{Y-1}{4}$=2.33。従って、a=10.32 となる。

(6) P (|Y − 1| < b) = 0.95 となる b の値を求めよ。
P (|Y − 1| < b) のカッコの中身は $-b+1<Y<b+1$ と変換できる。
(5) と同様に、0.95 は、正規分布の 0.5(グラフ半分) よりも大きい。よって、-b+1 はマイナスの座標、b+1 はプラスの座標ということが推測される。
ここで、-b+1 と b+1 を確率関数変換の式にそれぞれ代入すると、$-\frac{b}{4}<Y<\frac{b}{4}$ となる。
計算のイメージは、$(\int_0^\infty-\int_{b+1}^\infty)+\int_0^\infty-\int_{-b+1}^\infty=2\int_0^\infty-\int_{b+1}^\infty-\int_{-b+1}^\infty$ となり、ここで、$\int_{b+1}^\infty-\int_{-b+1}^\infty$ の計算結果が 0.05 になるはずである。つまり、1 つは 0.025 ということになる。正規分布表より、0.025 となる Z の値は、1.96。従って、$Z=\frac{b}{4}=1.96$ より、b=7.84 となる。

参考文献:
LaTeX - コマンド一覧
$http : //www1.kiy.jp/\ yoka/LaTeX/latex.html$
再生性 - Wikipedia
http://ja.wikipedia.org/wiki/再生性