確率及び統計：レポート 5
氏名：津波古正輝
学籍番号：075739A
提出日：8 月 4 日 (火曜日)

母集団が二項分布が B(n,p) に従うとき、サンプルサイズ N の標本平均の分布を求めよ。

問題文を簡単にすると、$\overline{X} = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X^{(i)}$ の分布を求めるということ。
$\overline{X}$ の特定関数を求めればすぐにわかるのだが、その為には、

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X^{(i)}$ の特定関数
2. $\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X^{(i)}$ の特定関数

を求める必要がある。

1. まず X の特定関数を求める。
   X は二項分布の確率関数なので、
$$\begin{aligned}&\phi(\epsilon) =< e^{i\epsilon X} >= \sum_{x=0}^{n} e^{i\epsilon x} X\\ &=\sum_{x=0}^{n} e^{i\epsilon x}{}_nC_x P^x(1-P)^{n-x}\\ &=\sum_{x=0}^{n} {}_nC_x (Pe^{(i\epsilon)x})(1-P)^{n-x}\\ &=(Pe^{i\epsilon}+1-P)^n\end{aligned}$$
   となる。
   $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X^{(i)}$を求めたいのだが、二項分布の和は、どうなるのかわからない。そこで、$Z =$ 二項分布 $(A) +$ 二項分布 (B) とすると、Z の特性関数は
$$\phi(\epsilon) =< e^{i\epsilon Z} >=< e^{i\epsilon(A+B)} >=< e^{i\epsilon A}\cdot e^{i\epsilon B} >= \sum_{x=0}^{n} e^{i\epsilon A} A\cdot \sum_{x=0}^{n} e^{i\epsilon B} B$$
   より、A と B は二項分布の確率関関数なので、
$$\begin{aligned}&=(Pe^{i\epsilon}+1-P)^n\cdot(Pe^{i\epsilon}+1-P)^n\\ &=(Pe^{i\epsilon}+1-P)^{2n}\end{aligned}$$

以上より、$\sum_{i=1}^{n} X^{(i)}$は$(Pe^{i\epsilon}+1-P)^{Nn}$となる。

2. $\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} X^{(i)}$ の特定関数を求める。

$$
\begin{aligned}
&\phi(\epsilon) =< e^{i\epsilon\frac{1}{N}x} > \\
&=\sum_{x=0}^{n} e^{i\epsilon\frac{1}{N}x}(\sum_{i=1}^{n} X^{(i)}) \\
&=\sum_{x=0}^{n} {}_nC_x(Pe^{(i\epsilon\frac{1}{N})})^x(1-P)^{n-x} \\
&=(Pe^{\frac{i\epsilon}{N}}+1-P)^{nN}
\end{aligned}
$$

より、$\frac{1}{N}$ 倍された $\sum_{i=1}^{n} X^{(i)}$ の特性関数は $\phi(\epsilon)=(Pe^{\frac{i\epsilon}{N}}+1-P)^{nN}$ である。

求めた特性関数から分布は求められ, 平均は nP、分散は $\frac{np(1-P)}{N}$ の分布ということがわかる。