確率及び統計：レポート 6
氏名：津波古正輝
学籍番号：075739A
提出日：8 月 4 日 (火曜日)

正規分布に従う母集団から次の大きさ 10 の標本を得た

1.7 2.4 2.7 1.8 3.0 4.1 1.8 3.2 1.6 2.3

1. 母数μ、σ^2をそれぞれ最尤 (サイユウ) 推定せよ。
2. 母数μ、σ^2を信頼水準 0.95 でそれぞれ区間推定せよ。
3. 帰無仮説 $H_0 : \mu = 2$ を有意水準 0.05 で両側検定せよ。
4. 帰無仮説 $H_0 : \sigma = 1$ を有意水準 0.1 で両側検定せよ。

1.

最尤推定とは、最もらしい母集団についての情報を得る操作のこと。
確率の大きな事象ほど起りやすいので、無作為に抽出された標本の値を得る確率 (尤度関数という) が最大になる時に、最も尤も (もっとも) らしい母集団になるはずである。

まず、尤度関数:L(Θ) の対数をとる。(l(Θ) とし、この最大を求める))

$$\log_e L(\Theta) = l(\Theta) = \sum_{l=1}^{N} \log_e W(x^{(l)}, \Theta)$$

正規分布に従うので、確率変数は、$W(x,\Theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x^{(l)}-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ より、

$$= \sum_{l=1}^{N} \log_e \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x^{(l)}-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right\}$$

$$= -\frac{N}{2} \log_e 2\pi\sigma^2 - \frac{\sum_{l=1}^{N}(x(l)-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

以上より、対数尤度が求められた。

対数尤度が最大となるのは、$l(\Theta)$ をグラフで表したときの極値を求めればよいので、$\frac{dl(\Theta)}{d(\Theta)} = 0$ をもとめればよい。

母数 (Θ) は,μ と σ^2 より, それぞれの場合を求める。

$$=\frac{dl(\Theta)}{d(\mu)} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{l=1}^{N}(x^{(l)} - \mu) = 0$$

$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{l=1}^{N}(x^{(l)} - \mu) = 0$ より、

$$N\mu = \sum_{l=1}^{N} x^{(l)}$$

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} x^{(l)}$$

最尤推定値は

$\widehat{\mu} = \frac{1.7+2.4+2.7+1.8+3.0+4.1+1.8+3.2+1.6+2.3}{10} = 2.46$ となる。

母数がσ^2の時

対数尤度が $-\frac{N}{2} \log_e 2\pi\sigma^2 - \frac{\sum_{l=1}^{N}(x(l)-\mu)^2}{2\sigma^2}$、$\frac{dl(\sigma^2)}{d(\sigma^2)} = 0$ より、

$$0 = -\frac{N}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{l=1}^{N}(x^{(l)} - \mu)^2$$

$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N}(x^{(l)} - \mu)^2$より、

$$\sigma^2 = \frac{(1.7-2.46)^2+(2.4-2.46)^2+(2.7-2.46)^2+(1.8-2.46)^2+(3.0-2.46)^2+(4.1-2.46)^2+(1.8-2.46)^2+(3.2-2.46)^2+(1.6-2.46)^2+(2.3-2.46)^2}{10}$$

$= 0.5804$

2. 母数μ、σ^2を信頼水準 0.95 でそれぞれ区間推定せよ。
   問題文を簡単にすると、95 パーセントの確かさで μ はある区間にあるということ。その区間を

調べる。
その区間を求める公式は、

$$\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{N}} z_u < \mu < \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{N}} z_\mu$$

である。
しかし、母分散 (σ) が不明なので、不偏分散 (S^2) を用いる公式を使用する。

$$\text{この}\ \overline{X} - \frac{S}{\sqrt{N}} t_u < \mu < \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{N}} t_\mu$$

ここで、$\overline{X}$を$\overline{x}$に置き換え、S を s で置き換える。(x の値が分かっているから)
$\overline{X}$は、$\overline{x} = 2.46$
S は
$\frac{S^2}{\sigma^2} = \frac{\lambda^2(N-1)}{N-1}$ より、
$S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{l=1}^{N} (X^{(l)} - \overline{X})^2$
s と$\overline{x}$に置き換えて
$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{l=1}^{N} (x^{(l)} - \overline{x})^2$
問題より、
$s^2 = \frac{(1.7-2.46)^2+(2.4-2.46)^2+(2.7-2.46)^2+(1.8-2.46)^2+(3.0-2.46)^2++(4.1-2.46)^2+(1.8-2.46)^2+(3.2-2.46)^2+(1.6-2.46)^2+(2.3-2.46)^2}{9}$
=0.645
また、$\frac{S^2}{\sigma^2} = \frac{\lambda^2(N-1)}{N-1}$の、$\frac{S^2}{\sigma^2}$は、自由度 $N-1$ のカイ二乗分布に従う。よって、教科書の t 分布の表より、自由度 9 で信頼水準 0.95(有意水準 0.05) の値は 2.685$(= t_u)$ である。
よって、不偏分散を用いた公式より、
$2.46 - (2.685)\sqrt{\frac{0.645}{10}} < \mu < 2.46 + (2.685)\sqrt{\frac{0.645}{10}}$
$1.781 < \mu < 3.139$

3. 帰無仮説 $H_0 : \mu = 2$ を有意水準 0.05 で両側検定せよ。
検定とは、仮説が正しいかどうかを調べることである。
$H_0 : \mu = 2$ とは『μ は 2 であると過程。』という事。
μ は有意水準の中なのか、t 分布を用いて検定を行う事にする。このとき、検定に必要な検定統

計量 (K) は、
K=N 個の t 分布の確率変数
であり、(2) から母分散 σ^2 が未定の場合の t 分布は、N-1 の自由度である。よって、
K=T(N-1)
t 分布で自由度 N-1 の確率変数は、
T(N)=$\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{N}}}$ なので
$=\frac{\overline{X}-2}{\frac{S}{\sqrt{10}}}$
ここで、$\overline{X}$と不偏分散 S は、(2) より、$\overline{x}$と s^2とに置き換えて
$= \frac{2.46-2}{\sqrt{\frac{0.645}{10}}} = 1.811$
有意水準が 0.05 の時、棄却域の面積 a は 0.025 より、自由度 9、$a = 0.025$ となる。
仮説 H_0のもとにおける統計量 K の確率分布 $W(K|H_0)$ の K 上の値は $|2.685|$ である。
よって、$\mu = 2$ は棄却域外であり、『仮説 $H_0 : \mu = 2$ は棄却されない』という結果が得られる。

4. 帰無仮説 $H_0 : \sigma^2 = 1$ を有意水準 0.1 で両側検定せよ。
σ^2が t 分布ではないので、カイ 2 乗分布を使用する。母数 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う $X^{(1)}$、$X^{(2)}$、$\cdots X^{(10)}$ の標本平均の和は (標準化変数済み)、自由度 $N-1$ のカイ 2 乗分布に従う。母分数σ^2が未知より、不偏分数を用いる。
確率変数は、$\lambda^2(N-1) = \frac{S^2(N-1)}{\sigma^2}$となる。
よって、検定統計量 K は、
$K = \lambda^2(N-1) = \frac{S^2(N-1)}{\sigma^2}$より、
不偏分散 S^2は (2) より、s^2と置き換え、
$= \frac{0.645(10-1)}{1} = 5.805$ となる。
カイ 2 乗分布の表より、
自由度 9 で有意水準 0.1 の棄却域を表す K の座標は、
a=0.1 より、
$\frac{a}{2} = 0.05$
$1 - \frac{a}{2} = 0.95$ よって
カイ 2 乗分布の表より、K=3.33、K=16.92
検定統計量は、5.805 より、H_0は棄却されない。