「確率及び統計」　試験問題補・解答用紙 (裏面使用可)

2008.8.8

学籍番号：075739A

氏名：津波古正輝

提出日：8 月 13 日 (水曜日)

注意：
全ての設問において思考と計算の過程を詳しく記述すること。記述が無い場合は減点すること。

問 1:
事象 A お起る確率 P(A) が $\frac{1}{3}$ のベルヌイ試行を 10 回行うとき、A が 2 回起る確率を求めよ。(3 点)

A が起らない確率は $\frac{2}{3}$。10 回の試行を行い、そのうち事象 A のでる回数が、2 回。それ以外は事象 A 以外である。つまり、事象 A の組み合わせは、${}_{10}C_2$、事象 A 以外の組み合わせは残りの ${}_{8}C_8$ となり、それぞれの確率を掛け合わせると、

$${}_{10}C_2 \times {}_{8}C_8 \times (\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^8$$
$$= \frac{1280}{6561} \cong 0.19509221$$

よって、19.5 %となる。

問 2:
白球が m 個、赤球が n 個ある。白球と赤球を混ぜて一列に並べるときの順列の数を求めよ。ただし、白球どうしと赤球どうしはそれぞれの間で区別できないものとする。(3 点)

m、n をそれぞれ区別をしたときの並びは、(m+n)!である。
区別をしない時は、その区別しないグループの階乗で除算しればよい。m、n ともにあるので、m!、n!で割ればよい。

よって、$\frac{(m+n)!}{m! \cdot n!}$ となる。

問 3:
次の関数 f(x) が確率密度関数となるように定数 a の値を定め、期待値を求めよ。(6 点)

$$f(x) = ae^{-|2x|} \qquad -\infty \leqq x \leqq \infty$$

連続な確率関数は、全区間で積分すると 1 になるので、
$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$
$=\int_{-\infty}^{\infty} ae^{-|2x|}dx$

$=\int_{-\infty}^{0} ae^{2x}dx + \int_{0}^{\infty} ae^{-2x}dx$
$=a\int_{-\infty}^{0} e^{2x}dx + a\int_{0}^{\infty} e^{-2x}dx$
$=a\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{-\infty}^{0} + a\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{0}^{\infty}$
$=\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a$
=a

よって、a=1 となる。

$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xW(x)dx$ より、
$=\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-|2x|}dx$ (a=1)
$=\int_{-\infty}^{0} xe^{2x}dx + \int_{0}^{\infty} xe^{-2x}dx$
$=\left[\frac{1}{2}xe^{2x}\right]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}e^{2x}dx$
$+\{\left[-\frac{1}{2}xe^{-2x}\right]_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{2}e^{-2x}dx\}$
$=-\frac{1}{4} + (-(\frac{1}{4})(-1)) = 0$

よって、$E[X] = 0$ となる。

問 4:
コイントスを 100 回行ったところ、表が 64 回でた。このコインはゆがみが無いと言えるか。(3 点)

検定を行う。正確なコインならば表がでる確率は、$\frac{1}{2}$ である。なので、問題のコインの表のでる確率を $\frac{1}{2}$ と仮定する。
コインの確率は、離散的なもので、二項分布に従う。よって、平均と分散は、
平均: 二項分布 $({}_nC_x P^x (1-P)^{n-x})$ より
$\left[\frac{\partial}{\partial(i\epsilon)}\phi(\epsilon)\right]_{\epsilon=0} = np$
分散:
$\left[\frac{\partial^2}{\partial(i\epsilon)^2}\phi(\epsilon)\right]_{\epsilon=0} = n(n-1)p^2 + np$
平均の結果より、分散 $\sigma^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p)$

n が大きくなると、二項分布の振る舞いは、正規分布に従う。変数の標準化を行い、それに対応する確率変数は $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ となる。
確率変数を、平均、分散の変数と対応させると、
$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ より、問題文から
$z = \frac{64-100\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{100\cdot\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}} = 2.8$
医学論文での有意水準は通常 0.05 より (*1) z=1.96
つまり、問題文の条件では、棄却域内であり、仮説は棄却される。

よって、コインはゆがみが無いと言えない。

参考文献 : $(*1) http://www.nakayamashoten.co.jp/ebm/pdf/key0301.pdf$