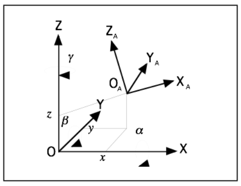
ロボットの運動学

- 運動学(Kinematics)
  ロボットアームの各リンクや作業対象の位置，速度などの関係を空間的幾何学関係から論じる．
  - 順運動学(Forward Kinematics)
    - 関節変位ベクトルが与えられたとき，位置姿勢ベクトルを求める．
  - 逆運動学(Inverse Kinematics)
    - 位置姿勢ベクトルが与えられたとき，関節変位ベクトルを求める．

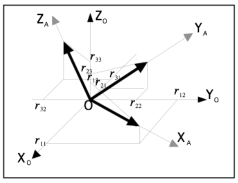
自由度

- 空間内でロボットを動作させるときに独立に駆動・制御できる関節軸の数．
- 基準座標系$OXYZ$から物体座標系$O_AX_AY_AZ_A$への変換
  $(x, y, z, a, b, g\ )$の6自由度により位置と姿勢が決定される．



座標変換

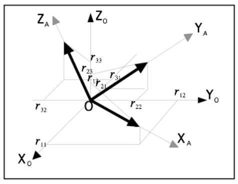
- 回転移動
- 原点Oを共通して持つ座標系$OX_OY_OZ_O$と$O_AX_AY_AZ_A$．以下，座標系$O_AX_AY_AZ_A$をΣ_Aと書く
- $O_AX_AY_AZ_A$の単位ベクトルを，



座標変換

- $O_AX_AY_AZ_A$の単位ベクトルを，

$$x_A = (r_{11} \quad r_{12} \quad r_{13})^T$$
$$y_A = (r_{21} \quad r_{22} \quad r_{23})^T$$
$$z_A = (r_{31} \quad r_{32} \quad r_{33})^T$$
$$^O\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p_{O_x} \\ p_{O_y} \\ p_{O_z} \end{bmatrix} = p_{A_x}\,{}^O\boldsymbol{x}_A + p_{A_y}\,{}^O\boldsymbol{y}_A + p_{A_z}\,{}^O\boldsymbol{z}_A$$
$$= [\boldsymbol{x}_A \quad \boldsymbol{y}_A \quad \boldsymbol{z}_A]\,{}^A\boldsymbol{p}$$

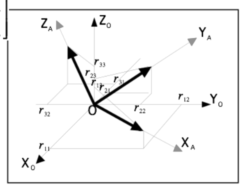


回転行列 ^OR_A

$$^OR_A = [\boldsymbol{x}_A \quad \boldsymbol{y}_A \quad \boldsymbol{z}_A] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix}$$

- $^OR_A{}^{-1} = {}^OR_A$より，回転行列は，直交行列である．
- $^AR_O = {}^OR_A{}^{-1}$
- Z_O軸のまわりにθ回転させたときの回転行列は，$^Oz_A = (0\ 0\ 1)^T$より

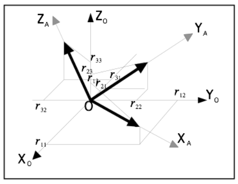
$$^OR_A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$^OR_A = [\boldsymbol{x}_A \quad \boldsymbol{y}_A \quad \boldsymbol{z}_A] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix}$$

- Σ_O，Σ_Aと原点が一致している第３の座標系Σ_Bを考えると，
- $^OR_A = {}^OR_A{}^AR_B$
- I_3を3×3単位行列とすると，

$$^OR_O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$



同次変換

- 座標系Σ_Aの座標系Σ_Oに対する位置が${}^O\boldsymbol{p}_A$で，姿勢の回転行列が${}^OR_A$で与えられるとき，点PをΣ_AとΣ_Oで，表したベクトルは以下の関係を持つ．
- ${}^O\boldsymbol{r}={}^OR_A{}^A\boldsymbol{r}+{}^O\boldsymbol{p}_A$
- 3×1ベクトル$\boldsymbol{r}$の要素に1を加えて4×1ベクトルとして，次式とする．

$$\left[\begin{array}{c}{}^O\boldsymbol{r}\\ \hline 1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}\multicolumn{3}{c|}{{}^OR_A} & {}^Op_A\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}{}^1r\\ \hline 1\end{array}\right]$$

$${}^OT_A=\left[\begin{array}{ccc|c}\multicolumn{3}{c|}{{}^OR_A} & {}^Op_A\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

同次変換

- 座標系Σ_Aの座標系Σ_Oに対する位置が${}^O\boldsymbol{p}_A$で，姿勢の回転行列が${}^OR_A$で与えられるとき，点PをΣ_AとΣ_Oで，表したベクトルは以下の関係を持つ．
- ここで，${}^OT_A$は，同次変換行列といい，１回の乗算により平行移動と回転移動が簡潔に表現できる．これを同次変換という．なお，平行移動のみの同次変換行列を，

$$\left[\begin{array}{ccc|c}\multicolumn{3}{c|}{I_3} & {}^Op_A\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]=Trans\left({}^Op_A{}^T\right)$$

で表し，

同次変換

- k軸での回転角θによる回転移動のみの同次変換行列を

$$\left[\begin{array}{ccc|c}\multicolumn{3}{c|}{{}^OR_A} & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]=Rot(\boldsymbol{k},\theta)$$

- 任意の同次変換行列は，

$${}^OT_A=Trans\left({}^O\boldsymbol{p}_A{}^T\right)Rot(\boldsymbol{k},\theta)$$

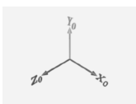
同次変換

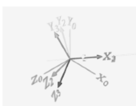
- ３つの座標系Σ_O，Σ_A，Σ_Bについて，Σ_OとΣ_Aの関係が${}^OT_A$，Σ_AとΣ_Bの関係が${}^AT_B$で与えられているとき，Σ_OとΣ_Aの関係${}^OT_B$は，
- ${}^OT_B={}^OT_A{}^AT_B$
- で与えられる．
- 逆変換は，

$${}^AT_O={}^OT_A{}^{-1}=\left[\begin{array}{ccc|c}\multicolumn{3}{c|}{{}^OR_A{}^T} & -{}^OR_A{}^T{}^O\boldsymbol{p}_A\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

ロール・ピッチ・ヨー角

- 姿勢表現
  - Z軸周りにΦ回転：ロール角
  - Y軸周りにθ回転：ピッチ角
  - X軸周りにψ回転：ヨー角

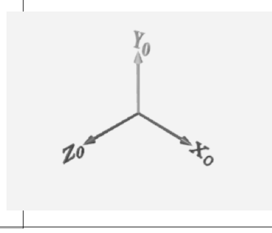




図表：
東北学院大学 工学部 機械創成工学科 熊谷正朗
http://www.mech.tohoku-gakuin.ac.jp/rde/

ロール・ピッチ・ヨー角

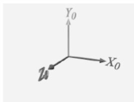
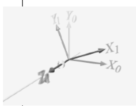
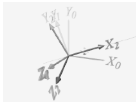
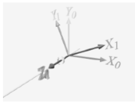
- 姿勢表現
  - Z軸周りにΦ回転：ロール角
  - Y軸周りにθ回転：ピッチ角
  - X軸周りにψ回転：ヨー角



図表：
東北学院大学 工学部 機械創成工学科 熊谷正朗
http://www.mech.tohoku-gakuin.ac.jp/rde/

オイラー角

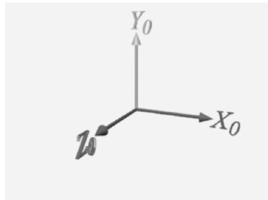
- 姿勢表現（Z-X-Z）
  - Z軸周りにΦ回転
  - Y軸周りにθ回転
  - Z軸周りにψ回転

図表：
東北学院大学 工学部 機械創成工学科 熊谷正朗
http://www.mech.tohoku-gakuin.ac.jp/rde/

オイラー角

- 姿勢表現（Z-X-Z）
  - Z軸周りにΦ回転
  - Y軸周りにθ回転
  - Z軸周りにψ回転

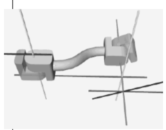
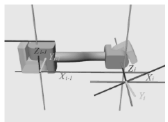
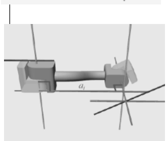
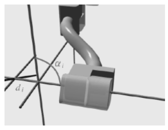
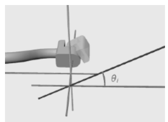


図表：
東北学院大学 工学部 機械創成工学科 熊谷正朗
http://www.mech.tohoku-gakuin.ac.jp/rde/

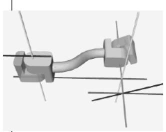
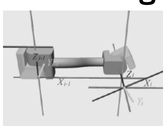
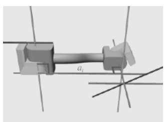
Denavit–Hartenberg（DH）記法

- デナビット-ハーテンバーグ記法
  - 4変数でリンク機構を記述する方法
  - リンク座標系Σ_iをΣ_{i-1}から見た場合の同次変換
- Zi軸は関節軸iに一致
- Xi軸はZi軸とZ_{i+1}軸の共通垂線にする
- ZiとXiの交点が原点Oiになって、ZiとXiの外積によりYi軸が定まる

Denavit–Hartenberg（DH）記法

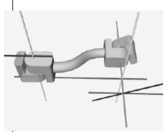
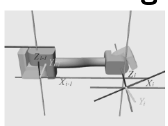
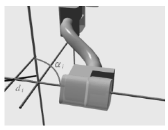
Denavit–Hartenberg（DH）記法

Z_{i-1}とZ_iを結ぶ共通垂線の長さ a_i だけX_{i-1}方向に平行移動

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

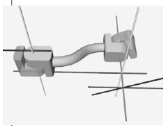
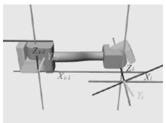
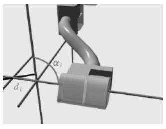
Denavit–Hartenberg（DH）記法

Z_{i-1}がa_i平行移動した線とZ_i軸の成す角度αだけX_{i-1}軸回りに回転

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i & 0 \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

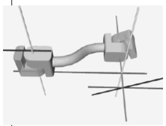
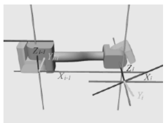
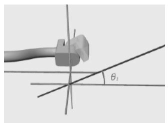
Denavit-Hartenberg(DH)記法

$X_{i\text{-}1}$軸がX_i軸の位置に来るように
回転したあとの$Z_{i\text{-}1}$軸(Z_iに同じ)の方向にd_iだけ平行移動

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Denavit-Hartenberg(DH)記法

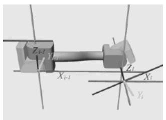




$X_{i\text{-}1}$軸がX_i軸に一致するように、$Z_{i\text{-}1}$軸まわりにθ_i回転

$$\begin{pmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Denavit-Hartenberg(DH)記法

座標系i-1から
座標系iに至る
同次変換行列

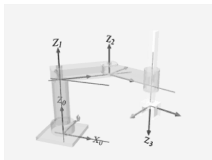
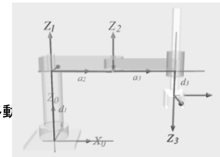


$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i & 0 \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^{i-1}\boldsymbol{T}_i = \begin{pmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & a_i \\ C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i & -d_i S\alpha_i \\ S\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & d_i C\alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

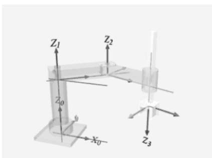
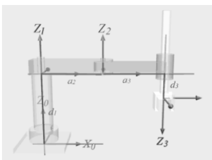
Example

- 座標系０→１：
  - Z0軸方向にd_1だけ平行移動
  - 関節１の関節角度θ_1だけ回転
  - a_1=0，α_1=0
- 座標系１ → ２：
  - X_1軸方向にa_2移動，
  - 関節２の角度θ_2だけ回転
  - α_2=0，d_2=0
- 座標系２ → ３：
  - X_2軸方向にa_3移動
  - X_2軸回りにα_3=180度(π)回転
  - 回転後のZ_2軸方向(鉛直下向)にd_3移動
  - θ_3=0

Example

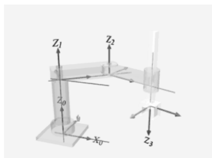
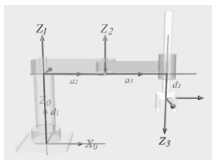
リンク	a	α	d	θ
1	0	0	d_1	θ_1
2	a_2	0	0	θ_2
3	a_3	π	d_3	0

Example

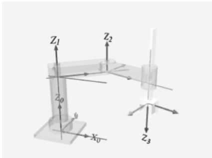
リンク	a	α	d	θ
1	0	0	d_1	θ_1
2	a_2	0	0	θ_2
3	a_3	π	d_3	0

$$^0T_1 = \begin{pmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & 0 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

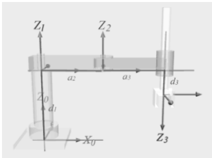



Example

リンク	a	α	d	θ
1	0	0	d_1	θ_1
2	a_2	0	0	θ_2
3	a_3	π	d_3	0

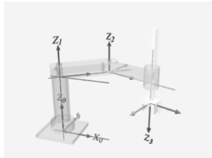


$$
{}^{1}T_2 = \begin{pmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & a_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

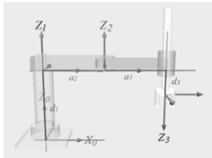


Example

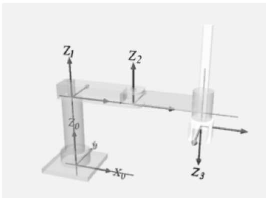
リンク	a	α	d	θ
1	0	0	d_1	θ_1
2	a_2	0	0	θ_2
3	a_3	π	d_3	0



$$
{}^{2}T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$



Example



$$
{}^{0}T_3 = \begin{pmatrix} C(\theta_1+\theta_2) & S(\theta_1+\theta_2) & 0 & a_2C\theta_1 + a_3C(\theta_1+\theta_2) \\ S(\theta_1+\theta_2) & -C(\theta_1+\theta_2) & 0 & a_2S\theta_1 + a_3S(\theta_1+\theta_2) \\ 0 & 0 & -1 & d_1 - d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

順運動学と逆運動学

- 関節変位(回転、直動)→手先位置・姿勢：順運動学
  - Forward(Direct) Kinematics
- 手先位置・姿勢→関節変位(回転、直動)：逆運動学
  - Inverse Kinematics

$$
\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q})
$$

$\boldsymbol{r}$:手先の位置と姿勢を表すベクトル
$\boldsymbol{q}$: 関節変位を表すベクトル

順運動学

関節変位 $\boldsymbol{q} = (\theta_1, \theta_2, d_3)^T$

$$
\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, r_3)^T = {}^{0}T_3(0,0,0,1)^T
$$

$$
\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2C\theta_1 + a_3C(\theta_1+\theta_2) \\ a_2S\theta_1 + a_3S(\theta_1+\theta_2) \\ d_1 - d_3 \end{pmatrix}
$$

逆運動学

関節変位 $\boldsymbol{q} = (\theta_1, \theta_2, d_3)^T$

$$
\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, r_3)^T = {}^{0}T_3(0,0,0,1)^T
$$

$$
\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2C\theta_1 + a_3C(\theta_1+\theta_2) \\ a_2S\theta_1 + a_3S(\theta_1+\theta_2) \\ d_1 - d_3 \end{pmatrix}
$$

これをθ1, θ2, d3について解く

逆運動学

θ1, θ2, d3について解く

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2C\theta_1 + a_3C(\theta_1+\theta_2) \\ a_2S\theta_1 + a_3S(\theta_1+\theta_2) \\ d_1 - d_3 \end{pmatrix}$$

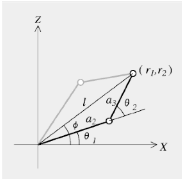
$$d_3 = d_1 - r_3$$

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \\ \phi &= \tan^{-1}(r_2/r_1) \end{aligned}$$

$$l^2 = a_2^2 + a_3^2 - 2a_2a_3\cos(\pi - \theta_2)$$

$$\theta_2 = \pi - \cos^{-1}(\frac{a_2^2 + a_3^2 - l^2}{2a_2a_3})$$

$$\phi - \theta_1 = \cos^{-1}(\frac{a_2^2 + l^2 - a_3^2}{2a_2 l})$$



ヤコビ行列

数値計算によって解を得る

1. 仮の $\boldsymbol{q}$ を定める。
2. 順運動学を用いて $\boldsymbol{r}$ を得る。
3. 目的とする $\boldsymbol{r}$ との差を求め、それをもとに $\boldsymbol{q}$ を微修正する
4. $\boldsymbol{r}$ の誤差が十分小さくなるまで繰り返す。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_i &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}_i) \\ \boldsymbol{q}_{i+1} &= \boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}_i)^{-1}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{ref}) \end{aligned}$$

$$J_{ij} = \frac{\partial r_i}{\partial q_j}$$

J: 修正の方向と程度を決める行列

$\boldsymbol{q}$ の各成分を微少に動かしたときの，$\boldsymbol{r}$ の各成分が受ける影響を行列にまとめたもの

$$\delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\delta\boldsymbol{q}$$

ヤコビ行列

順運動学が直接的な式で求まっている場合，それを直接微分することでヤコビ行列が得られる．

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2C\theta_1 + a_3C(\theta_1+\theta_2) \\ a_2S\theta_1 + a_3S(\theta_1+\theta_2) \\ d_1 - d_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) &= \begin{pmatrix} \partial r_1/\partial\theta_1 & \partial r_1/\partial\theta_2 & \partial r_1/\partial d_3 \\ \partial r_2/\partial\theta_1 & \partial r_2/\partial\theta_2 & \partial r_2/\partial d_3 \\ \partial r_3/\partial\theta_1 & \partial r_3/\partial\theta_2 & \partial r_3/\partial d_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -a_2S\theta_1 - a_3\sin(\theta_1+\theta_2) & -a_3\sin(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ a_2C\theta_1 + a_3\cos(\theta_1+\theta_2) & a_3\cos(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ヤコビ行列

ヤコビ行列を分解した列ベクトル

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j} = \begin{pmatrix} \partial r_1/\partial q_j \\ \vdots \\ \partial r_n/\partial q_j \end{pmatrix}$$

•ある関節を動かした影響が手先座標 $\boldsymbol{r}$ にどれだけ出るか，を示したものと解釈できる．
•ロボットの現在の姿勢があれば，関節一個を動かしたときの影響は簡単に求められる．

ヤコビ行列

ヤコビ行列を分解した列ベクトル

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j} = \begin{pmatrix} \partial r_1/\partial q_j \\ \vdots \\ \partial r_n/\partial q_j \end{pmatrix}$$

•回転関節が手先位置に与える影響は、その軸からみた手先までの距離に比例し、方向は円周方向になる。
•このとき、軸の位置、向き、手先位置をすべて基準座標系(リンク０)に変換しておく。
•直動関節が手先位置に与える影響は、その伸縮そのものである。
•伸縮方向を直前までの同次変換行列で基準座標系に変換しておく
•回転関節が手先姿勢に与える影響は、手先姿勢の評価方法にもよるため一概に言えないが、角速度はその軸が平行である限り軸の位置は関係ないため、関節の回転角速度は手先の回転角速度そのものになる。
•直動関節は手先の姿勢に影響を与えない．

速度の運動学

$$J_{ij} = \frac{\partial r_i}{\partial q_j}$$

微少な関節の変位と，手先の変位の関係として

$$\delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\delta\boldsymbol{q}$$

両辺をその変位にかかった時間δtで割り，それを０への極限をとると

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$$

ヤコビ行列は，関節の速度を手先の速度に変換する行列としても使える．
これは速度の順運動学である．
ロボットがある姿勢の時にヤコビ行列に逆行列があれば，

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})^{-1}\dot{\boldsymbol{r}}$$

手先の速度から関節速度がもとまります．
つまり，手先の速度をきめれば，それを実現するための関節の速度が得られる．
これは速度の逆運動学である．

ヤコビ行列で見るロボットの特性

- 速度の逆運動学を得られる条件
  →　ヤコビ行列の逆行列がある
  - 正方行列であること
  - 行列式が０ではないこと
    - 空間で位置と姿勢を決めるには6変数が必要
    - そのとき関節は最低6個あればよい，という意味は、*r* と *q* の数が等しいという条件を満たす最低ラインを意味する.
    - ここでは *r* と *q* の数は等しいものとします。

ヤコビ行列で見るロボットの特性

- 行列式がゼロになるということは

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) &= \begin{pmatrix} \partial r_1/\partial\theta_1 & \partial r_1/\partial\theta_2 & \partial r_1/\partial d_3 \\ \partial r_2/\partial\theta_1 & \partial r_2/\partial\theta_2 & \partial r_2/\partial d_3 \\ \partial r_3/\partial\theta_1 & \partial r_3/\partial\theta_2 & \partial r_3/\partial d_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -a_2S\theta_1 - a_3S(\theta_1+\theta_2) & -a_3S(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ a_2C\theta_1 + a_3C(\theta_1+\theta_2) & a_3C(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{J}| &= [\{-a_2S\theta_1 - a_3S(\theta_1+\theta_2)\}\{a_3C(\theta_1+\theta_2)\} + \{a_2C\theta_1 a_3C(\theta_1+\theta_2)\}\{a_3S(\theta_1+\theta_2)\}](-1) \\
&= a_2a_3S\theta_1C(\theta_1+\theta_2) - a_2a_3C\theta_1S(\theta_1+\theta_2) \\
&= a_2a_3\{S\theta_1(C\theta_1C\theta_2 - S\theta_1S\theta_2) - C\theta_1(S\theta_1C\theta_2 + S\theta_2C\theta_1)\} \\
&= a_2a_3\{-(S\theta_1)^2S\theta_2 - (C\theta_1)^2S\theta_2\} \\
&= -a_2a_3\sin(\theta_2)
\end{aligned}
$$

ヤコビ行列で見るロボットの特性

- 行列式がゼロになるということは
- $|J| = -a_2a_3 sin(\theta_2)$ がゼロになる
  - $sin(\theta 2)$＝0は2つ目の関節が真っ直ぐに伸びた状態か(θ_2=0)
  - もしくは完全に折り畳まれた状態($\theta_2=\pi$)
  - 特異点
    - 特定の方向への運動が出来なくなっています．また，特異姿勢のそばでは，ちょっとの動きをするために，関節を極端に高速に動かす必要がある.

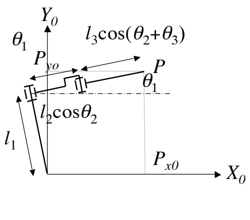
ヤコビ行列の数値解法

$$J_{ij} = \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \lim_{\Delta q_j \to 0} \frac{r_i(q_1,..,q_j,..,q_n) - r_i(q_1,..,q_j+\Delta q_j,..,q_n)}{\Delta q_j}$$

$$J_{ij} = \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \simeq \frac{r_i(q_1,..,q_j,..,q_n) - r_i(q_1,..,q_j+\Delta q_j,..,q_n)}{\Delta q_j}$$

- Δq_jを０にリミットせず，十分小さな値にする.
  - 運動学の式をつかって現在のロボットの関節値から手先座標を求める.
  - 各関節値を個別にほんの少しΔだけ増やした手先座標を求める.
  - ずらした手先座標からもとの手先座標を引き，差をΔで割る.
  - (関節の数だけ繰り返し)

アーム先端位置の順運動学



アーム先端位置の順運動学