

# カルノー図による論理関数の簡単化

## カルノー図による論理関数の簡単化

| OR の真理値表 |      |            |
|----------|------|------------|
| 入力 A     | 入力 B | 出力 f(A, B) |
| 0        | 0    | 0          |
| 0        | 1    | 1          |
| 1        | 0    | 1          |
| 1        | 1    | 1          |

- 上記 OR の真理値表から加法標準形を作ると、

$$\begin{aligned} f &= A' \cdot B + A \cdot B' + A \cdot B \\ &= A \cdot (B+B') + A' \cdot B \\ &= A + A' \cdot B \\ &\text{うまく OR の形にならない。} \end{aligned}$$

再度挑戦  
べき等則

$$\begin{aligned} f &= A' \cdot B + A \cdot B' + A \cdot B \\ &= A' \cdot B + A \cdot B' + A \cdot B + A \cdot B \\ &= (A \cdot B + A' \cdot B) + (A \cdot B + A \cdot B') \\ \text{分配則で因数分解すると、} &= (A+A') \cdot B + A \cdot (B+B') \\ &= B+A \end{aligned}$$

- 以上のように、ブール代数による変形は熟練がないと、行き詰まることもある。

そこでカルノー図を用いて式の簡単化をする。

- カルノー図とは真理値表をマスメを用いて表したものである。

| 2変数のカルノー図   | 2入力 OR のカルノー図 |   |   |   |  |   |   |   |   |      |   |   |   |  |   |   |   |
|---|---------------|---|---|---|--|---|---|---|---|------|---|---|---|--|---|---|---|
| <p style="text-align: center;"><b>2入力カルノー図</b></p> <p>出力 f      入力 A<br/>                  0    1</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="padding-right: 5px;">入力 B</td> <td style="padding-right: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">a</td> <td style="padding: 5px;">c</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="padding-right: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">b</td> <td style="padding: 5px;">c</td> </tr> </table> <p>a は入力A=0, B=0に対応する出力<br/>b は入力A=0, B=1に対応する出力<br/>c は入力A=1, B=0に対応する出力<br/>d は入力A=1, B=1に対応する出力</p> | 入力 B          | 0 | a | c |  | 1 | b | c | <p>出力 f      入力 A<br/>                  0    1</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="padding-right: 5px;">入力 B</td> <td style="padding-right: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">1</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="padding-right: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">1</td> </tr> </table> | 入力 B | 0 | 0 | 1 |  | 1 | 1 | 1 |
| 入力 B  | 0             | a | c |   |  |   |   |   |   |      |   |   |   |  |   |   |   |
|   | 1             | b | c |   |  |   |   |   |   |      |   |   |   |  |   |   |   |
| 入力 B  | 0             | 0 | 1 |   |  |   |   |   |   |      |   |   |   |  |   |   |   |
|   | 1             | 1 | 1 |   |  |   |   |   |   |      |   |   |   |  |   |   |   |

- カルノー図の隣接するマスメは1つの入力信号の変化に対応する。

| 2入力 OR のカルノー図  | 2入力 OR のカルノー図 |   |   |   |  |   |   |   |   |      |   |   |   |  |   |   |   |
|--|---------------|---|---|---|--|---|---|---|---|------|---|---|---|--|---|---|---|
| <p>出力 f      入力 A<br/>                  0    1</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="padding-right: 5px;">入力 B</td> <td style="padding-right: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">1</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="padding-right: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">1</td> </tr> </table> <p>矢印方向の変化は、B=1の時に、Aを0から1に変化させることに対応する。<br/>この時、出力は1のままであるので、B=1ならば、Aに関係なく出力は1。<br/>したがって、この2マスをも <math>B \cdot A' + B \cdot A</math> でなく <math>B</math> で表せる。</p> | 入力 B          | 0 | 0 | 1 |  | 1 | 1 | 1 | <p>出力 f      入力 A<br/>                  0    1</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="padding-right: 5px;">入力 B</td> <td style="padding-right: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">1</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="padding-right: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">1</td> </tr> </table> <p>同じく、点線で囲まれた2マスも <math>A \cdot B' + A \cdot B</math> ではなく、<math>A</math> とすることができる。<br/>結局、<math>f = A + B</math> となる。<br/>隣接する1をグループ化することで、ブール式を簡単化することができる。</p> | 入力 B | 0 | 0 | 1 |  | 1 | 1 | 1 |
| 入力 B   | 0             | 0 | 1 |   |  |   |   |   |   |      |   |   |   |  |   |   |   |
|  | 1             | 1 | 1 |   |  |   |   |   |   |      |   |   |   |  |   |   |   |
| 入力 B   | 0             | 0 | 1 |   |  |   |   |   |   |      |   |   |   |  |   |   |   |
|  | 1             | 1 | 1 |   |  |   |   |   |   |      |   |   |   |  |   |   |   |

### 3入力のカルノー図

| 3変数のカルノー図 |   |        |    |    |    |
|-----------|---|--------|----|----|----|
| 3入力カルノー図  |   |        |    |    |    |
| 出力 f      |   | 入力 A,B |    |    |    |
|           |   | 00     | 01 | 11 | 10 |
| 入力 C      | 0 |        |    |    |    |
|           | 1 |        |    |    |    |

### 4入力のカルノー図

| 4変数のカルノー図 |    |        |    |    |    |
|-----------|----|--------|----|----|----|
| 4入力カルノー図  |    |        |    |    |    |
| 出力 f      |    | 入力 A,B |    |    |    |
|           |    | 00     | 01 | 11 | 10 |
| 入力 C,D    | 00 |        |    |    |    |
|           | 01 |        |    |    |    |
|           | 11 |        |    |    |    |
|           | 10 |        |    |    |    |

### 例題

$$f(A,B,C,D) = A \cdot B \cdot C' \cdot D' + A' \cdot B' \cdot C' \cdot D + A \cdot B' \cdot C' \cdot D + A' \cdot B' \cdot C \cdot D + A' \cdot B \cdot C \cdot D + A \cdot B \cdot C \cdot D + A' \cdot B' \cdot C \cdot D' + A' \cdot B \cdot C \cdot D'$$

を簡単化する。以前やった、ブール式の性質だけでは難しそうだが、カルノー図でやると以下のようにになります。

|  |   |   |   |   |  |    |   |  |  |   |    |   |   |   |  |    |   |   |  |  |  |    |  |  |   |  |    |   |  |  |   |    |   |   |   |  |    |   |   |  |  |
|--|---|---|---|---|--|----|---|--|--|---|----|---|---|---|--|----|---|---|--|--|--|----|--|--|---|--|----|---|--|--|---|----|---|---|---|--|----|---|---|--|--|
| 4変数のカルノー図  | 隣接する $2^n$ 個 (1,2,4,...) の '1' をグループ化する |   |   |   |  |    |   |  |  |   |    |   |   |   |  |    |   |   |  |  |  |    |  |  |   |  |    |   |  |  |   |    |   |   |   |  |    |   |   |  |  |
| <b>4入力カルノー図</b><br>出力 f<br>入力 A,B<br>00 01 11 10<br><table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>00</td><td></td><td></td><td>1</td><td></td></tr> <tr><td>01</td><td>1</td><td></td><td></td><td>1</td></tr> <tr><td>11</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td></tr> <tr><td>10</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td></tr> </table> | 00                                      |   |   | 1 |  | 01 | 1 |  |  | 1 | 11 | 1 | 1 | 1 |  | 10 | 1 | 1 |  |  | <b>4入力カルノー図</b><br>出力 f<br>入力 A,B<br>00 01 11 10<br><table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>00</td><td></td><td></td><td style="border: 1px solid black;">1</td><td></td></tr> <tr><td>01</td><td style="border: 1px solid black;">1</td><td></td><td></td><td style="border: 1px solid black;">1</td></tr> <tr><td>11</td><td style="border: 1px solid black;">1</td><td style="border: 1px solid black;">1</td><td style="border: 1px solid black;">1</td><td></td></tr> <tr><td>10</td><td style="border: 1px solid black;">1</td><td style="border: 1px solid black;">1</td><td></td><td></td></tr> </table> | 00 |  |  | 1 |  | 01 | 1 |  |  | 1 | 11 | 1 | 1 | 1 |  | 10 | 1 | 1 |  |  |
| 00   |   |   | 1 |   |  |    |   |  |  |   |    |   |   |   |  |    |   |   |  |  |  |    |  |  |   |  |    |   |  |  |   |    |   |   |   |  |    |   |   |  |  |
| 01   | 1                                       |   |   | 1 |  |    |   |  |  |   |    |   |   |   |  |    |   |   |  |  |  |    |  |  |   |  |    |   |  |  |   |    |   |   |   |  |    |   |   |  |  |
| 11   | 1                                       | 1 | 1 |   |  |    |   |  |  |   |    |   |   |   |  |    |   |   |  |  |  |    |  |  |   |  |    |   |  |  |   |    |   |   |   |  |    |   |   |  |  |
| 10   | 1                                       | 1 |   |   |  |    |   |  |  |   |    |   |   |   |  |    |   |   |  |  |  |    |  |  |   |  |    |   |  |  |   |    |   |   |   |  |    |   |   |  |  |
| 00   |   |   | 1 |   |  |    |   |  |  |   |    |   |   |   |  |    |   |   |  |  |  |    |  |  |   |  |    |   |  |  |   |    |   |   |   |  |    |   |   |  |  |
| 01   | 1                                       |   |   | 1 |  |    |   |  |  |   |    |   |   |   |  |    |   |   |  |  |  |    |  |  |   |  |    |   |  |  |   |    |   |   |   |  |    |   |   |  |  |
| 11   | 1                                       | 1 | 1 |   |  |    |   |  |  |   |    |   |   |   |  |    |   |   |  |  |  |    |  |  |   |  |    |   |  |  |   |    |   |   |   |  |    |   |   |  |  |
| 10   | 1                                       | 1 |   |   |  |    |   |  |  |   |    |   |   |   |  |    |   |   |  |  |  |    |  |  |   |  |    |   |  |  |   |    |   |   |   |  |    |   |   |  |  |

- 四角で囲った部分は AND ゲートとなり、全体を OR することになる。
- オーバーラップしてでも、四角で多くの1を囲む方が良い、1の数が1つでは4入力 AND ゲート、2つでは3入力 AND ゲート、4つでは2入力 AND ゲートとゲートが単純(トランジスタ数が少ない)になる。
- 点線の四角の囲みはなくても、すべての1を囲めているので、不要である。

ということで、  $f(A,B,C,D) = A \cdot B \cdot C' \cdot D' + B' \cdot C' \cdot D + A' \cdot C + B \cdot C \cdot D$

と簡単化される。回路図は以下のようなになる。

|  |  |
|--|--|
| 簡単化したあとの回路図  | NAND,NOR,NOT を使ってトランジスタ数を減らすと、                       |
|  |  |
| トランジスタ数は<br>$2 \cdot 4 + 10 + 2 \cdot 8 + 6 + 10 = 50$ | トランジスタ数は<br>$2 \cdot 4 + 8 + 2 \cdot 6 + 4 + 8 = 40$ |

## 禁止項を利用した簡単化

- まず、禁止項とはなにか？  
→ そのような入力の組み合わせが発生せず、出力がどうでもよい。
- 英語では DON'T CARE (ドントケア) と言い、「気にしない、どうでも良い」の意味

### 例題

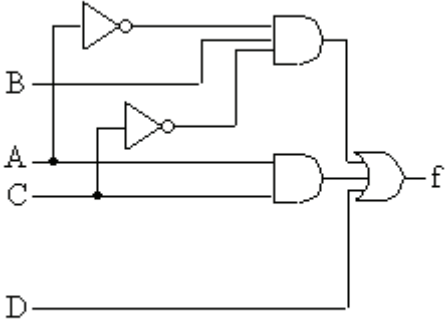
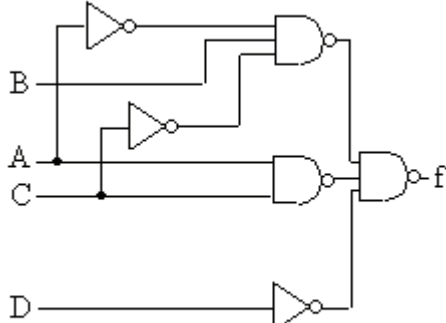
| 4変数のカルノー図   | 隣接する $2^n$ 個 (1, 2, 4, ...) の '1' をグループ化する |        |        |        |    |  |  |  |    |    |    |    |    |  |  |   |  |  |    |   |   |   |   |  |    |        |        |        |        |  |    |  |  |   |   |  |   |  |  |        |  |  |  |  |  |    |    |    |    |    |  |  |   |  |  |    |   |   |   |   |  |    |        |        |        |        |  |    |  |  |   |   |  |
|---|--|--------|--------|--------|----|--|--|--|----|----|----|----|----|--|--|---|--|--|----|---|---|---|---|--|----|--------|--------|--------|--------|--|----|--|--|---|---|--|---|--|--|--------|--|--|--|--|--|----|----|----|----|----|--|--|---|--|--|----|---|---|---|---|--|----|--------|--------|--------|--------|--|----|--|--|---|---|--|
| <p>ドントケアを <math>\phi</math> で示す。</p> <p>出力 f</p> <table border="1"> <tr> <td></td> <td></td> <td colspan="4">入力 A,B</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>00</td> <td>01</td> <td>11</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>00</td> <td></td> <td></td> <td>1</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>01</td> <td>1</td> <td>1</td> <td>1</td> <td>1</td> <td></td> </tr> <tr> <td>11</td> <td><math>\phi</math></td> <td><math>\phi</math></td> <td><math>\phi</math></td> <td><math>\phi</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td>10</td> <td></td> <td></td> <td>1</td> <td>1</td> <td></td> </tr> </table> <p>入力 C,D</p> |  |        | 入力 A,B |        |    |  |  |  | 00 | 01 | 11 | 10 | 00 |  |  | 1 |  |  | 01 | 1 | 1 | 1 | 1 |  | 11 | $\phi$ | $\phi$ | $\phi$ | $\phi$ |  | 10 |  |  | 1 | 1 |  | <p>ドントケアを利用して、すべての1をなるべく大きいな四角で囲む。</p> <p>出力 f</p> <table border="1"> <tr> <td></td> <td></td> <td colspan="4">入力 A,B</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>00</td> <td>01</td> <td>11</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>00</td> <td></td> <td></td> <td>1</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>01</td> <td>1</td> <td>1</td> <td>1</td> <td>1</td> <td></td> </tr> <tr> <td>11</td> <td><math>\phi</math></td> <td><math>\phi</math></td> <td><math>\phi</math></td> <td><math>\phi</math></td> <td></td> </tr> <tr> <td>10</td> <td></td> <td></td> <td>1</td> <td>1</td> <td></td> </tr> </table> <p>入力 C,D</p> |  |  | 入力 A,B |  |  |  |  |  | 00 | 01 | 11 | 10 | 00 |  |  | 1 |  |  | 01 | 1 | 1 | 1 | 1 |  | 11 | $\phi$ | $\phi$ | $\phi$ | $\phi$ |  | 10 |  |  | 1 | 1 |  |
|   |  | 入力 A,B |        |        |    |  |  |  |    |    |    |    |    |  |  |   |  |  |    |   |   |   |   |  |    |        |        |        |        |  |    |  |  |   |   |  |   |  |  |        |  |  |  |  |  |    |    |    |    |    |  |  |   |  |  |    |   |   |   |   |  |    |        |        |        |        |  |    |  |  |   |   |  |
|   |  | 00     | 01     | 11     | 10 |  |  |  |    |    |    |    |    |  |  |   |  |  |    |   |   |   |   |  |    |        |        |        |        |  |    |  |  |   |   |  |   |  |  |        |  |  |  |  |  |    |    |    |    |    |  |  |   |  |  |    |   |   |   |   |  |    |        |        |        |        |  |    |  |  |   |   |  |
| 00  |  |        | 1      |        |    |  |  |  |    |    |    |    |    |  |  |   |  |  |    |   |   |   |   |  |    |        |        |        |        |  |    |  |  |   |   |  |   |  |  |        |  |  |  |  |  |    |    |    |    |    |  |  |   |  |  |    |   |   |   |   |  |    |        |        |        |        |  |    |  |  |   |   |  |
| 01  | 1  | 1      | 1      | 1      |    |  |  |  |    |    |    |    |    |  |  |   |  |  |    |   |   |   |   |  |    |        |        |        |        |  |    |  |  |   |   |  |   |  |  |        |  |  |  |  |  |    |    |    |    |    |  |  |   |  |  |    |   |   |   |   |  |    |        |        |        |        |  |    |  |  |   |   |  |
| 11  | $\phi$                                     | $\phi$ | $\phi$ | $\phi$ |    |  |  |  |    |    |    |    |    |  |  |   |  |  |    |   |   |   |   |  |    |        |        |        |        |  |    |  |  |   |   |  |   |  |  |        |  |  |  |  |  |    |    |    |    |    |  |  |   |  |  |    |   |   |   |   |  |    |        |        |        |        |  |    |  |  |   |   |  |
| 10  |  |        | 1      | 1      |    |  |  |  |    |    |    |    |    |  |  |   |  |  |    |   |   |   |   |  |    |        |        |        |        |  |    |  |  |   |   |  |   |  |  |        |  |  |  |  |  |    |    |    |    |    |  |  |   |  |  |    |   |   |   |   |  |    |        |        |        |        |  |    |  |  |   |   |  |
|   |  | 入力 A,B |        |        |    |  |  |  |    |    |    |    |    |  |  |   |  |  |    |   |   |   |   |  |    |        |        |        |        |  |    |  |  |   |   |  |   |  |  |        |  |  |  |  |  |    |    |    |    |    |  |  |   |  |  |    |   |   |   |   |  |    |        |        |        |        |  |    |  |  |   |   |  |
|   |  | 00     | 01     | 11     | 10 |  |  |  |    |    |    |    |    |  |  |   |  |  |    |   |   |   |   |  |    |        |        |        |        |  |    |  |  |   |   |  |   |  |  |        |  |  |  |  |  |    |    |    |    |    |  |  |   |  |  |    |   |   |   |   |  |    |        |        |        |        |  |    |  |  |   |   |  |
| 00  |  |        | 1      |        |    |  |  |  |    |    |    |    |    |  |  |   |  |  |    |   |   |   |   |  |    |        |        |        |        |  |    |  |  |   |   |  |   |  |  |        |  |  |  |  |  |    |    |    |    |    |  |  |   |  |  |    |   |   |   |   |  |    |        |        |        |        |  |    |  |  |   |   |  |
| 01  | 1  | 1      | 1      | 1      |    |  |  |  |    |    |    |    |    |  |  |   |  |  |    |   |   |   |   |  |    |        |        |        |        |  |    |  |  |   |   |  |   |  |  |        |  |  |  |  |  |    |    |    |    |    |  |  |   |  |  |    |   |   |   |   |  |    |        |        |        |        |  |    |  |  |   |   |  |
| 11  | $\phi$                                     | $\phi$ | $\phi$ | $\phi$ |    |  |  |  |    |    |    |    |    |  |  |   |  |  |    |   |   |   |   |  |    |        |        |        |        |  |    |  |  |   |   |  |   |  |  |        |  |  |  |  |  |    |    |    |    |    |  |  |   |  |  |    |   |   |   |   |  |    |        |        |        |        |  |    |  |  |   |   |  |
| 10  |  |        | 1      | 1      |    |  |  |  |    |    |    |    |    |  |  |   |  |  |    |   |   |   |   |  |    |        |        |        |        |  |    |  |  |   |   |  |   |  |  |        |  |  |  |  |  |    |    |    |    |    |  |  |   |  |  |    |   |   |   |   |  |    |        |        |        |        |  |    |  |  |   |   |  |

- ドントケア ( $\phi$  の部分) はそのような入力はされなくて、そのときの出力はいつでもよいので、必要であればそれを1と考えることで、四角で囲まれたグループを大きくする。
- 説明したように、囲みが大きいほど、対応する AND ゲートの入力数は減り、トランジスタ数が減る。
- 一般的に、トランジスタ数が少ない方が、LSI 上の面積が小さく、かつ動作スピードも速い。
- もちろん、すべてのドントケアを囲む必要はない。

ということで、 $f(A,B,C,D) = A' \cdot B \cdot C' + D + A \cdot C$

と簡単化される。

回路図は以下のようになる。

| <p>単純化したあとの回路図</p>  | <p>NAND,NOR,NOT を使って<br/>トランジスタ数を減らすと、</p>   |
|---|--|
|  |  |
| <p>トランジスタ数は<br/><math>2*2 + 8 + 6 + 8 = 26</math></p>                             | <p>トランジスタ数は<br/><math>3*2 + 6 + 4 + 6 = 22</math></p>                              |

**宿題4 学籍番号 名前 日付 を書いて 提出すること。**

(注意:回路を設計する場合、特に明記しないが、なるべく少ないゲート数で実現せよ。)

- 1)  $A \cdot (A' + B) = A \cdot B$  をブール代数の性質をもちいて証明せよ。
- 2)  $(A \cdot B + A' \cdot B) = A \cdot B' + A' \cdot B$  をブール代数の性質をもちいて証明せよ。
- 3) 以下の真理値表をカルノー図で表し、隣接する1があれば○で囲み、その結果より出力関数fのブール式を求めよ。

| <p>???の真理値表</p> |             |                  |
|-----------------|-------------|------------------|
| <p>入力 A</p>     | <p>入力 B</p> | <p>出力f(A, B)</p> |
| <p>0</p>        | <p>0</p>    | <p>0</p>         |
| <p>0</p>        | <p>1</p>    | <p>1</p>         |
| <p>1</p>        | <p>0</p>    | <p>0</p>         |
| <p>1</p>        | <p>1</p>    | <p>1</p>         |

4) 以下をカルノー図を用いてブール式を簡単化せよ。

$$f = A' \cdot B' \cdot C' \cdot D' + A' \cdot B \cdot C' \cdot D + A \cdot B \cdot C \cdot D + A \cdot B' \cdot C' \cdot D \\ + A' \cdot B' \cdot C \cdot D' + A \cdot B \cdot C' \cdot D + A' \cdot B \cdot C \cdot D + A \cdot B' \cdot C \cdot D$$

5) 前問で  $A' \cdot D$  が禁止項の場合、 $f$  はどのように簡単化されるか示せ。

6) 上記2)の論理関数 $f$ を回路図を実現せよ。(なるべく少ないトランジスタ数で実現せよ。)

また、そのときのトランジスタ数はいくつか？

7) 二つの2ビットの2進数  $A$ 、 $B$  があるとき、

(i)  $A > B$  のとき、出力が1となる論理関数 $f$ の真理値表を描け

(ii) (i)で得られた真理値表より加法標準形で論理関数を表せ

(iii) (ii)の論理関数について、カルノー図を描き簡単化を行え。

(vi) 簡単化された論理関数を実現せよ。

この時、2進数  $A$  の MSB を  $A_1$ 、LSB を  $A_0$ 、 $B$  の MSB を  $B_1$ 、LSB を  $B_0$  とせよ。

8) 上記 4)の論理関数の回路図をなるべく少ないトランジスタ数で実現せよ。

また、そのときのトランジスタ数はいくつか？

9) 上記 7)で  $A=B$  の時だけ、出力が1となる回路を同様の手順で設計せよ。

この時、2進数  $A$  の MSB を  $A_1$ 、LSB を  $A_0$ 、 $B$  の MSB を  $B_1$ 、LSB を  $B_0$  とせよ。

以上