信号処理とメディア通信　Handout#4　 2011/5/10

信号処理とメディア通信　講義レジメ

担当：和田知久　 （ファイヤー和田）
所属：琉球大学　工学部　情報工学科
連絡先：wada@ie.u-ryukyu.ac.jp
Home Page: http://www.ie.u-ryukyu.ac.jp/~wada/

１）フーリエ変換　：　周波数成分の混ざり具合を調べる数学手段

２）直交する信号の例（１）

$\cos(2\pi m f_0 t)$と $\sin(2\pi m f_0 t)$ なる三角関数　異なる信号どうしは直交している。
m=0,1 とし、１周期=$1/f_0$ を３等分してサンプリングしたのが図３．１の例

上記はサンプリングすなわちデジタル信号化した時の直交性であるが、アナログすなわち連続信号の場合は以下の計算で直交性が確認できる。積して積分値=0 は直交している。

$$\int_0^T \cos(2\pi m f_0 t)\cdot\cos(2\pi n f_0 t)dt = \begin{cases} \dfrac{T}{2}(m=n) \\ 0(m\neq n) \end{cases}$$

$$\int_0^T \sin(2\pi m f_0 t)\cdot\sin(2\pi n f_0 t)dt = \begin{cases} \dfrac{T}{2}(m=n) \\ 0(m\neq n) \end{cases}$$

$$\int_0^T \cos(2\pi m f_0 t)\cdot\sin(2\pi n f_0 t)dt = 0$$

３）直交する信号の例（２）
三角関数による信号は直交していた。
回転関数（複素正弦波）を勉強しよう！

ディスクリート（ディジタル）・フーリエ変換は　回転関数（複素正弦波）を正規直交基底に採用している。

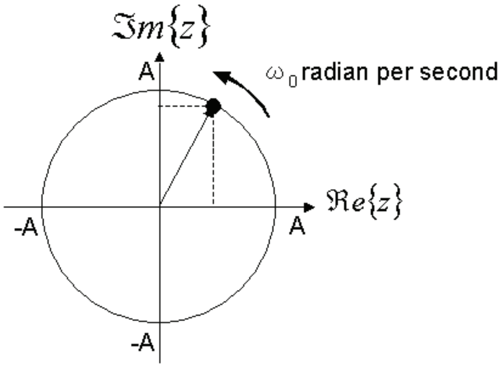
４）DFT では、三角関数の代わりに以下の

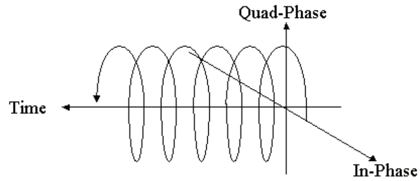
$$\tilde{x}(t) = Ae^{j(\omega_0 t+\phi)}$$

$$= A\cos(\omega_0 t+\phi) + jA\sin(\omega_0 t+\phi)$$

複素指数関数を使用する。

〇これは、I 軸を実数、Q 軸を虚数とする平面での回転を示す関数となる。　（回転関数）



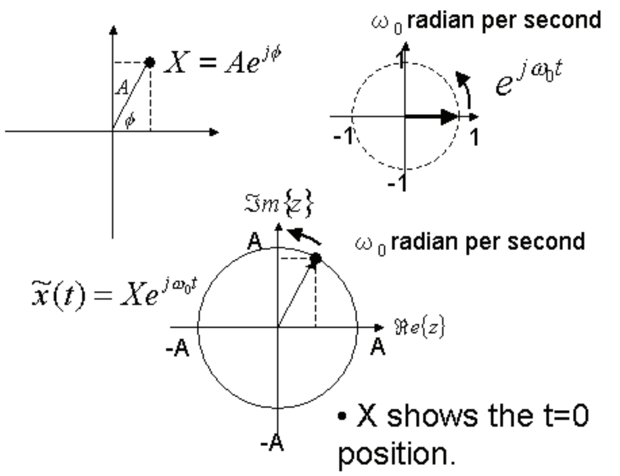

〇特に無線通信の信号処理では、三角関数 x(t)のかわりに、複素指数関数「回転関数」を使って処理をする。これを解析的信号とよぶ。

$$x(t) = \Re e\left\{Ae^{j(\omega_0 t+\phi)}\right\} = A\cos(\omega_0 t+\phi)$$

$$\tilde{x}(t) = Ae^{j(\omega_0 t+\phi)} = Ae^{j\phi}\cdot e^{j\omega_0 t}$$

$$X = Ae^{j\phi}$$

$$\tilde{x}(t) = Xe^{j\omega_0 t}$$




〇この複素指数関数の X（複素振幅という）は振幅と位相を示すものである。

５）離散フーリエ変換（複素基底）の公式

離散信号 x(nT)=x(n)に対する DFT の定義を示す。X(k)は周波数スペクトルであり、DFT 係数と呼ばれる。

【離散フーリエ変換 DFT】

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{\frac{-j2\pi nk}{N}} \qquad (k = 0,1,\cdots,N-1)$$

【逆離散フーリエ変換 IDFT】

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{\frac{j2\pi nk}{N}} \qquad (n = 0,1,\cdots,N-1)$$

DFT では 1/N をつけ、IDFT ではつけていない。これがこの教科書と同じ定義となる。

一般には、DFT の前に係数なしで、IDFT の前に 1/N をつけるものもあり、また
DFT、IDFT の両方の前に係数として 1/sqrt(N)をつけるものもある。

６）DFT 演算の行列表示

【離散フーリエ変換 DFT】

$$\begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{pmatrix} = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} \omega^0 & \omega^0 & \cdots & \omega^0 \\ \omega^0 & \omega^{-1} & \cdots & \omega^{-(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega^0 & \omega^{-(N-1)} & \cdots & \omega^{-(N-1)*(N-1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{pmatrix}$$

ただし、

$$Here, \omega = e^{j\frac{2\pi}{N}}$$

【逆離散フーリエ変換 IDFT】

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^0 & \omega^0 & \cdots & \omega^0 \\ \omega^0 & \omega^{1} & \cdots & \omega^{(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega^0 & \omega^{(N-1)} & \cdots & \omega^{(N-1)*(N-1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{pmatrix}$$

宿題２）

DFT4DEMO.m を参考に、16 点 DFT の場合に拡張せよ。このとき以下の信号を DFT せよ. 16 個の出力値の絶対値を取り、その大きさを図示せよ。

①｛0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 , 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1｝

②｛cos(2π*3/16*n) | n=0,1,…,15｝

以上